9 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 9.1.
Seien A und B $m \times n$-Matrizen über K. Es gilt: B ist zu A zeilenäquivalent gdw $B = PA$, wobei P das Produkt von $m \times m$-elementaren Matrizen ist.

Beweis

"$\Leftarrow$" Sei $P = E_\ell \dots E_2 E_1$, wobei E_t eine elementare $m \times m$-Matrix ist.
Also ist $E_1 A$ zeilenäquivalent zu A
und $E_2(E_1 A)$ ist zeilenäquivalent zu $E_1 A$.
Also ist $E_2 E_1 A$ zeilenäquivalent zu A.
So weiter fortsetzen:
$E_\ell \dots E_1 A$ ist zeilenäquivalent zu A
i.e. B ist zeilenäquivalent zu A.

"$\Rightarrow$" Sei B zeilenäquivalent zu A und seien $e_1, \cdots, e_\ell$ die elementaren Zeilenumformungen mit $A \overset{e_1}{\to} \cdots \overset{e_\ell}{\to} B$.
Also $E_\ell \cdots E_2 E_1 A = B$,
wobei E_t die elementare Matrix $e_t(I_m)$ für $t = 1, \dots, \ell$ ist.
Setze $P := E_\ell \cdots E_2 E_1$. $\square$

Definition 9.2.
Eine $n \times n$-*Matrix* A *ist invertierbar*, falls es eine $n \times n$-Matrix B gibt, so dass

$$AB = I_n \text{ und } BA = I_n.$$

In diesem Fall heißt B eine *Inverse von* A.

Proposition 9.3.
Sei A invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse.

Beweis
Seien B_1, B_2 beide Inverse von A. Es gilt:

$$\begin{array}{llcll} & AB_1 & = & I_n = AB_2 & \\ \text{also} & B_2(AB_1) & = & B_2(AB_2) & \text{(Multiplikation)} \\ \text{also} & (B_2A)B_1 & = & (B_2A)B_2 & \\ \text{also} & I_nB_1 & = & I_nB_2, & \text{i.e. } B_1 = B_2 \quad \square \end{array}$$

Notation
Wir bezeichnen mit A^{-1} die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix A.

Proposition 9.4.
Seien A, B $n \times n$-Matrizen über K. Es gilt
(i) Wenn A invertierbar, so auch A^{-1} und $(A^{-1})^{-1} = A$.
(ii) Wenn A und B beide invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis
(i) Wir berechnen $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Also ist A die Inverse von A^{-1}.

(ii) Wir berechnen $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B \equiv I_n$.
Analog $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. □

Korollar 9.5.
Seien $A_1, \ldots, A_\ell$ $n \times n$ -invertierbare Matrizen, dann ist das Produkt $A_1 \cdots A_\ell$ auch invertierbar und es gilt $(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}$ (∗)

Beweis
Induktion nach ℓ. Für $\ell = 1$ ist es klar.
Indutkionsannahme: (∗) gilt für ℓ.
Induktionsschritt: (∗) gilt für $\ell + 1$:
Beweis:

$$
\begin{array}{rcll}
(A_1 \cdots A_\ell \ A_{\ell+1})^{-1} & = & & \\
((A_1 \cdots A_\ell) \ A_{\ell+1})^{-1} & = & \leftarrow & \text{Proposition 9.4 (ii)} \\
A_{\ell+1}^{-1}(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} & = & \leftarrow & \text{Induktionsannahme} \\
A_{\ell+1}^{-1}(A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}) & = & \leftarrow & \text{Assoziativität} \\
A_{\ell+1}^{-1}A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1} & & & \square
\end{array}
$$

Proposition 9.6.
Elementare Matrizen sind invertierbar.

Beweis
Sei $E = e(I_n)$ eine elementare Matrix. Sei e^* die umgekehrte Zeilenumformung (auf die Zeilen von I_n; siehe Bemerkungen 5.3 (I), 5.4 (i) und 5.5 (i)) und $E^* := e^*(I_n)$. Wir berechnen

$$E^*E = e^*(I_n)e(I_n) = I_n \quad \text{und} \quad E^*E = EE^* = I_n$$

D.h. $E^* = E^{-1}$. □

Beispiel 9.7.
2×2-elementare Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

$c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Satz 9.8.
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar.

(ii) $A\underline{X} = \underline{b}$ ist konsistent für jede $n \times 1$-Spaltenmatrix $\underline{b}$.

(iii) $A\underline{X} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung.

(iv) A ist zeilenäquivalent zu I_n.

(v) A ist Produkt von elementaren Matrizen.

[(ii) und (iii): Beziehung zwischen homogener und allgemeiner (quadratischer) Systeme.]

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Setze $\underline{X} := A^{-1}\underline{b}$. Es gilt $A\underline{X} = A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = I_n\underline{b} = \underline{b}$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) schon bewiesen (Korollar 7.4).

(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Wenn $A\underline{X} = 0$ nicht triviale Lösungen hätte, dann ist die r.Z.S.F. R von A nicht I_n, also muss eine Nullzeile haben (siehe Bemerkung 7.3 und Korollar 7.4). Also ist zum Beispiel das System

$(S) \quad R\underline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ inkonsistent.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun $\boxed{\mathrm{R} = \mathrm{PA}}$ wobei P das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 9.1). Also ist P invertierbar (Korollar 9.5 und Proposition 9.6).
Also multipliziere (S) durch P^{-1}:

$(S) \quad (PA)\underline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist inkonsistent.

Also $P^{-1}(PA)\underline{X} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist inkonsistent.

Also $A\underline{X} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ inkonsistent.

$$\underbrace{n \times n \quad n \times 1}_{n \times 1}$$

Setze $\underline{b} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, wir bekommmen $A\underline{X} = \underline{b}$ inkonsistent. Widerspruch.

(iv) $\Rightarrow$ (V)
$A = P'I_n = P'$, wobei P' das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 9.1).

(v) $\Rightarrow$ (i)
Folgt aus Korollar 9.5 und Proposition 9.6. $\square$

Korollar 9.9.
Seien A und B $m \times n$-Matrizen. B ist zeilenäquivalent zu A genau dann, wenn $B = PA$, wobei P eine invertierbare $m \times m$-Matrix ist.