

8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 1: § 6 Elementare Matrizen

Notation

Sei e eine elementare Zeilenumformung auf eine $m \times n$ -Matrix A . Mit $e(A)$ bezeichnet man die $m \times n$ -Matrix, die wir nun erhalten.

Untersuchung

Typ 1: Umtauschen von Zeilen Z_r und Z_s von A :

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r, i \neq s \\ A_{sj} & \text{für } i = r \\ A_{rj} & \text{für } i = s \end{cases}$$

Typ 2: Multiplizieren Z_r durch Skalar $c \neq 0; c \in K$:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ cA_{rj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Typ 3: Ersetzen von Z_r durch $Z_r + cZ_s, c \in K; r \neq s$:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Definition 8.1.

Eine $m \times m$ -Matrix in der Form $e(I_m)$ ist *elementar*.

Beispiel 8.2.

Die 2×2 elementaren Matrizen über K :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Typ1}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{Typ2, } c \neq 0, c \in K$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Typ3, } c \in K$$

Satz 8.3.

Sei e eine elementare Zeilenumformung und E die elementare Matrix $E := e(I_m)$ und sei A eine $m \times n$ -Matrix über K . Es gilt: $e(A) = EA$.

Beweis $e \in \text{Typ 1}, r \neq s$ (i) $E_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \neq r, i \neq s$ und(ii) $E_{rk} = \delta_{sk}$ für $i = r$ und(iii) $E_{sk} = \delta_{rk}$ für $i = s$ Nun: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}$ Fall (i): $i \neq r; i \neq s$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} \\ &= \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij} \end{aligned}$$

Fall (ii): $i = r$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m E_{rk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{sk} A_{kj} = \delta_{ss} A_{sj} = A_{sj} \end{aligned}$$

Fall (iii): $i = s$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m E_{sk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{rk} A_{kj} = \delta_{rr} A_{rj} = A_{rj} \end{aligned}$$

□

 e ist vom **Typ 2**: ÜA. e ist vom **Typ 3**: $r \neq s$

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Also: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}$ **Fall 1** $i \neq r$ Dann $\sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} = \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij}$ **Fall 2** $i = r$ Dann $\sum_{k=1}^m E_{rk} A_{kj} = \sum_{k=1}^m (\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj}$ Hier bekommen wir nur zwei Terme (die möglicherweise ungleich Null sind) und zwar nur für $k = r$ oder $k = s$. $k = r \Rightarrow$ Also $k \neq s$; also $c\delta_{sk} = 0$; also $(\delta_{rk} + c\delta_{sk})A_{kj} = (\delta_{rr} + 0)A_{rj} = A_{rj}$. $k = s \Rightarrow$ Also $k \neq r$; also $\delta_{rk} = 0$; also $(\delta_{rk} + c\delta_{sk})A_{kj} = (0 + c\delta_{ss})A_{sj} = cA_{sj}$.Also $\sum E_{rk} A_{kj} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}$

□