22 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 5 Lineare Funktionale

Bemerkung 22.1.
$W = K^1$ ist ein K-Vektorraum. $\dim(W) = 1$. Die Standard-Basis ist $\{1\}$. $W' \subseteq W$ ist ein Unterraum $\Rightarrow W' = \{0\}$ oder $W' = W$. Also $\dim W' = 0$ oder $\dim W' = 1$ und $\dim W' = 1$ genau dann, wenn $W' \neq \{0\}$.

Definition 22.2.
$f \in L(V, K)$ heißt ein *lineares Funktional*.

Beispiel 22.3.
$V = K^n$; $\mathcal{E}$ ist die Standard-Basis. Sei $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ fixiert.

Definiere $f : V \to K$ durch $f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ $\quad (*)$.

Es gilt $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{E},\{1\}} = [a_1, \ldots, a_n]$. Umgekehrt sei $f \in L(V, K)$. Setze $a_j := f(\mathcal{E}_j)$, dann erfüllt f $(*)$ für $(a_1, \ldots a_n)$.

Allgemeiner sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis.
Sei $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ fixiert.

Definiere $f : V \to K$ durch $f(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$. $\quad (*)$

Dann ist $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{B},\{1\}} = \big[[f(\alpha_1)]_{\{1\}} \mid \cdots \mid [f(\alpha_n)]_{\{1\}}\big] = \big([a_1]_{\{1\}} \mid \cdots \mid [a_n]_{\{1\}}\big) = [a_1, \ldots, a_n]$.

Und umgekehrt: $f \in L(V, K)$, setze $a_i = f(\alpha_i)$, dann ist f wie in $(*)$.

Beispiel 22.4.
$V = K^{n \times n}$; $\qquad tr : V \to K$

$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ ist ein lineares Funktional.

Beispiel 22.5.
Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $V = C([a, b]) := \{g : [a, b] \to \mathbb{R}; g \text{ stetig }\}$.
Setze $f(g) := \int_a^b g(t)dt$ für $g \in V$. Dann gilt $f \in L(V, \mathbb{R})$.

Definition 22.6. und Notation
$V^* = L(V, K)$ heißt der *Dualraum*.
Sei nun $\dim V = n$.

Bemerkung 22.7.
$\dim V^* = \dim L(V, K) = n = \dim V$.

Also für jede Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ für V werden wir nun eine Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* zuordnen.
Satz 17.8 liefert für $i = 1, \dots, n$ ein eindeutig definiertes Funktional f_i mit $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$.

Behauptung
$\{f_1, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für V^*. Es genügt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

Beweis
Für $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ mit $c_i \in K$ gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\alpha_j) = c_j. \tag{$**$}$$

Insbesondere wenn $f = 0$, dann gilt $f(\alpha_j) = 0$ für alle j, d.h. $c_j = 0$ für alle j. $\square$

Definition 22.8.
$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ heißt die *Dualbasis* zu $\mathcal{B}$.

Satz 22.9.
Sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V. Es existiert genau eine (Dual)Basis $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ für V^*, so dass

(1) $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$

(2) und $f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i$ für alle $f \in V^*$

(3) und $\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i$ für alle $\alpha \in V$.

Das heißt für alle $f \in V^*$ und für alle $\alpha \in V$ gilt:

$$[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \text{ und } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix} \text{ die sogenannte Dualität.}$$

Beweis

(1) Ergibt sich.

(2) $f \in V^* \Rightarrow f = \sum c_i f_i$ und $(**)$ liefert $c_j = f(\alpha_j)$ für alle $j = 1, \dots, n$.

(3) Analog: $\alpha = \sum x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j(\sum x_i \alpha_i) = x_j$. □

Bemerkung 22.10.
(3) beschreibt f_i als die "i-te Koordinatenfunktion bezüglich der Basis $\mathcal{B}$".

$f_i : V \to K; \alpha \mapsto$ die i-te Koordinate in $[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Bemerkung 22.11.
$f \in V^*; f \neq 0; I_m(f) \subseteq K$ ist ein Unterraum; $Im(f) \neq \{0\}$, also ist $Im(f) = K$ (Bemerkung 22.1). Es gilt $\dim(Imf) = R_f = 1$. Der Dimensionssatz impliziert nun $\dim\ker(f) + 1 = n$, also $\dim\ker(f) = n - 1$ (wobei $n := \dim V$).

Definition 22.12.
Sei $\dim(v) = n$ und $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim W = n - 1$, dann heißt W *Hyperraum* (oder *Hyperebene* oder Unterraum der *Kodimension 1*).

Bemerkung 22.11 besagt, dass wenn $f \in V^*$ und $f \neq 0$, dann gilt, dass $\ker(f) \subseteq V$ ein Hyperraum ist. Wir werden die Umkehrung (und mehr) zeigen.