26 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Definition 26.1.
T^t ist die transponierte Abbildung zu T.

Satz 26.2.
Es gelten:

(0) $\ker(T^t) = (R_T)^0$
(Nullraum des tranponierten T^t = Annihilator von Bild T)

(1) Rang (T^t) = Rang (T)

(2) $R_{T^t} = (\ker(T))^0$
(Bild des transponierten T^t = Annihilator von Nullraum T)

Beweis

(0) $g \in \ker(T^t) \Leftrightarrow T^t(g) = 0 \Leftrightarrow g \circ T = 0 \Leftrightarrow g(T(\alpha)) = 0$ für alle $\alpha \in V \Leftrightarrow g \in (R_T)^0$

(1) Setze $\dim V = n$ und $\dim W = m$. $r :=$ Rang $(T) := \dim R_T$.
Satz 23.4 impliziert:
$\dim(R_t) + \dim(R_T)^0 = \dim W = m$.
Also $r + \dim(R_T)^0 = m \Rightarrow \dim(R_T)^0 = m - r$.
Aus (0) folgt nun: $\dim(\ker T^t) = m - r$. Nun ist $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ und Satz 18.2 liefert Rang $(T^t) + \dim(\ker T^t) = \dim W^* = m$. Also Rang $(T^t) = m - (m - r) = r$.

(2) Setze $N := \ker(T)$.
Behauptung: $R_{T^t} \subseteq N^0$.
Beweis: Sei $f \in R_{T^t}$. Also $f = T^t(g)$. $f \in V^*$ für ein $g \in W^*$.
Sei $\alpha \in N$ und berechne: $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(0) = 0$.
Andererseits haben wir wieder
$$\dim N^0 = n - \dim N = \text{ Rang } (T) = \text{ Rang } (T^t)$$
(ergibt sich aus (1)).
Das heißt $R_{T^t} \subseteq N^0$ und $\dim R_{T^t} = \dim N^0$. Also $R_{T^t} = N^0$. □

Satz 26.3.
Seien V, W endlich dim Vektorräume über K. $T : V \longrightarrow W$ und $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ sind lineare Abbildungen. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis für V und $\mathcal{B}^*$ die Dualbasis und sei $\mathcal{B}'$ eine geordnete Basis für W und $(\mathcal{B}')^*$ die Dualbasis. Es gilt:
$$[T]^t_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [T^t]_{(\mathcal{B}')^*,\mathcal{B}^*}.$$

Beweis
Erinnerung: Sei A eine $m \times n$-Matrix, dann ist A^t eine $n \times m$-Matrix und $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.

Setze $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ und $B := [T^t]_{\mathcal{B}'^*,\mathcal{B}^*}$.
Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ und $(\mathcal{B}')^* = \{g_1, \dots, g_m\}$.

Per Definition gilt:

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i \text{ für alle } j = 1,\dots,n \tag{$*$}$$

$$T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i \text{ für alle } j = 1,\dots,m \tag{$**$}$$

Wir berechnen nun

$$\big((T^t)(g_j)\big)(\alpha_i) = g_j(T(\alpha_i)) = g_j\big(\sum_{k=1}^{m} A_{ki}\beta_k\big) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki} g_j(\beta_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\delta_{jk} = A_{ji}.$$

Nun für ein beliebiges $f \in V^* : f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i$ (Darstellung zur Basis $\mathcal{B}^*$).

Speziell für $f = T^t g_j$ ergibt sich dann:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i = T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} T^t g_j(\alpha_i) f_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} f_i.$$

Da $\mathcal{B}^*$ eine Basis ist, ist die Darstellung jedes f eindeutig, also $B_{ij} = A_{ji}$ wie behauptet. □

Wir geben nun als Anwendung einen sehr eleganten Beweis des Satzes, dass der Zeilenrang einer Matrix stets gleich ihrem Spaltenrang ist.

Erinnerung

(*i*) $Sr(A)$: *Spaltenrang von* $A =$ Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

(*ii*) $Zr(A)$: *Zeilenrang von* $A =$ Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

Satz 26.4.
K ist ein Körper. $A \in Mat_{m\times n}(K)$. Dann ist $Zr(A) = Sr(A)$.

Beweis
Es sei $\mathcal{E}_n$ die Standardbasis für K^n und $\mathcal{E}_m$ die Standardbasis für K^m. $T : K^n \longrightarrow K^m$ gegeben durch

$T\big((x_1,\dots,x_n)\big) = (y_1,\dots,y_m)$, wobei $y_i := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$.

Es ist $[T]_{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m} = A$. (ÜA).
Offenbar ist $Sr(A) =$ Rang (T), denn Bild (T) besteht gerade aus den Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A. Außerdem ist $Zr(A) = S_r(A^t)$, denn die Zeilen von A sind gerade die Spalten von A^t. Mit den Resultaten der letzten beiden Sätze folgt also:
$Sr(A) =$ Rang $(T) =$ Rang $(T^t) = Sr(A^t) = Zr(A)$, da $A^t = [T^t]_{\mathcal{E}_m^*,\mathcal{E}_n^*}$. □

Definition 26.5.
Rang $(A) := r(A) = Sr(A) = Zr(A)$.

Kapitel 3: § 8 Quotientenräume

Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum.

Definition 26.6.
Für alle $\alpha, \beta \in V$ gilt $\alpha \equiv \beta \bmod W$ (Kongruenz: α kongruent zu β modulo W), falls $\alpha - \beta \in W$.

Lemma 26.7.
$\equiv \bmod W$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Beweis

(1) Reflexiv: $\alpha - \alpha = 0 \in W$

(2) Symmetrisch: $\alpha - \beta \in W \Rightarrow -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha \in W$

(3) Transitiv: Sind $\alpha - \beta \in W$ und $\beta - \gamma \in W$,
so auch $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$. □

Definition 26.8.
Zu $\alpha \in V$ heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in V \mid \alpha \equiv \beta \bmod W\}$$

die Restklasse von α mod W.
$\{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$ heißen Restklassen von W.

Notation
$W/W := \{[\alpha]_w \mid \alpha \in W\}$.

Bemerkung 26.9.
Offenbar ist $[\alpha]_W = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}$. Wir können daher für $[\alpha]_W$ auch $\alpha + W$ schreiben. Also ist $V/W := \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$.