

15 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beispiel 15.1.

$$V = \mathbb{R}^3; \quad \mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = (1, 2, 1) \\ \alpha_2 = (2, 9, 0) \\ \alpha_3 = (3, 3, 4) \end{array} \right\} \text{ eine Basis weil } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ invertierbar.}$$

Finde

$$(i) \alpha \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und finde

$$(ii) [\alpha]_{\mathcal{B}} \text{ für } \alpha = (5, -1, 9).$$

Zu (i): $\alpha = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (11, 31, 7)$

Zu (ii): Finde x_1, x_2, x_3 mit $\alpha = \sum_{i=1}^3 x_i \alpha_i$ d.h.

$$(5, -1, 9) = x_1(1, 2, 1) + x_2(2, 9, 0) + x_3(3, 3, 4)$$

Löse LGS:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & = & 9 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ für \mathcal{B} und \mathcal{B}' geordnete Basen?

Bemerkung 15.2.

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0.$$

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$.

Schreibe $\alpha'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i$ $p_{ij} \in K$ - eindeutig

$$\text{d.h. } [\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}.$$

Nun sei $\alpha \in V$ beliebig und $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Also } \alpha &= \sum_{j=1}^n x'_j \alpha'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (p_{ij} x'_j) \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) \alpha_i. \end{aligned} \quad (*)$$

Es folgt aus (*), dass die i -te Koordinate von α bezüglich \mathcal{B} ist:

$$x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \quad 1 \leq i \leq n \quad (**)$$

Sei P die $n \times n$ -Matrix mit ij -tem Koeffizient p_{ij} . Wir schreiben (**) um: $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n p_{1j} x'_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_{nj} x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Ferner aus $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$ folgt, dass das homogene LGS $PX' = 0$ nur die triviale Lösung $X' = 0$ hat. Also ist P invertierbar. Wir bekommen also dual $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Wir haben bewiesen:

Satz 15.3.

Sei $\dim(V) = n$ über K , $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen wie in Bemerkung 15.2; P die eindeutig definierte invertierbare Matrix mit Spalten $P_j := [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ für $j = 1, \dots, n$. Es gelten für alle $\alpha \in V$

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Satz 15.4.

Sei P $n \times n$ invertierbar (über K), V ein n -dim K -Vektorraum und \mathcal{B} eine geordnete Basis. Es gibt eine eindeutig definierte (eindeutig bestimmte) geordnete Basis \mathcal{B}' von V , so dass für alle $\alpha \in V$

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Beweis

Wenn $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ (i) erfüllen sollte, dann gilt notwendigerweise $[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = P[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} =$

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}, \text{ also } \alpha'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i.$$

Nun zeigen wir, dass die so definierten α'_j eine Basis bilden. Sei $Q := P^{-1}$.

Wir berechnen:

$$\sum_j Q_{jk} \alpha'_j = \sum_j Q_{jk} \sum_i p_{ij} \alpha_i = \sum_j \sum_i p_{ij} Q_{jk} \alpha_i = \sum_i \left(\underbrace{\sum_j p_{ij} Q_{jk}}_{(PQ)_{ik}} \right) \alpha_i = \sum_i (\delta_{ik}) \alpha_i = \alpha_k \text{ für}$$

$$1 \leq k \leq n.$$

Also $\text{span}(\mathcal{B}') \supseteq \mathcal{B}$. So $\text{span}(\mathcal{B}') = V$. □

(Siehe HL1 und HL2)

$$\text{ÜB} \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Hilfslemma 1:} \quad \dim V = n; X \subseteq V; \\ \quad \quad \quad |X| = n \text{ und } X \text{ linear unabhängig} \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \\ \textbf{Hilfslemma 2:} \quad \dim V = n; X \subseteq V; \\ \quad \quad \quad |X| = n \text{ und } X \text{ erzeugt} \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \end{array} \right.$$

Korollar 15.5.

P $n \times n$ ist invertierbar \Leftrightarrow die Spalten von P sind linear unabhängig in K^n .

Beweis

$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = PX = 0$ hat nur die triviale Lösung $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i P_i = 0$ ist eine triviale lineare Kombination, wobei P_i die i -te Spalte von P ist.

Korollar 15.6.

Seien $\dim(V) = n$ und P $n \times n$ invertierbar genau dann, wenn die Spalten von P eine Basis für V bilden.

Beispiel 15.7.

Eine parametrische Familie von geordneten Basen $K = \mathbb{R}; \theta \in \mathbb{R}$.

$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

So gilt für jede $\theta \in \mathbb{R}$, dass $\mathcal{B}_\theta := \{(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)\}$ eine Basis für \mathbb{R}^2 ist.

Sei $\alpha = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Es gilt } [\alpha]_{\mathcal{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$