14 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 2: § 4 Koordinaten

Definition 14.1.
Sei V endlich dim K-Vektorraum; $\dim V = n$.
Eine *geordnete Basis* ist ein n-Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_i \in V$, so dass $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis ist.

Notation und Terminologie
Wir schreiben $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine geordnete Basis. (Wir werden nicht $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ schreiben.)

Lemma 14.2.
Sei V ein endlich dim K-Vektorraum; $\alpha \in V$, dann existiert ein eindeutiges n-Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$.

Beweis
$\alpha = \sum z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)\alpha_i = 0 \Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i$, für alle $1 \leq i \leq n$. □

Definition 14.3.
(1) x_i ist die *i-te Koordinate von α bezüglich $\mathcal{B}$*.

(2) $(x_1, \dots, x_n)$ ist das *Koordinaten-Tupel von α bezüglich $\mathcal{B}$*.

Definition 14.4.
V, W sind K-Vektorräume.

(1) $T : V \to W$ ist eine *lineare Abbildung* (oder *Transformation*), falls
  (a) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$
  (b) $T(c\alpha) = cT(\alpha)$;
  $\alpha, \beta \in V; c \in K$; (a) und (b) sind äquivalent zu: $\forall \alpha, \beta \in V$, $\forall c \in K$
  (c) $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$

Bemerkung
$$\left.\begin{array}{rcc} T(0) & = & T(0+0) \\ & = & T(0) + T(0) \end{array}\right\} \Rightarrow T(0) = 0.$$

(2) T ist eine *Isomorphie* oder ein *Isomorphismus*, falls T ferner bijektiv ist.

Notation
$V \overset{T}{\simeq} W$ oder $V \simeq W$

Terminologie
V und W sind isomorph.

Lemma 14.5.
Sei T eine lineare Transformation. Dann ist T injektiv genau dann, wenn
$\forall \alpha (T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$.

Beweis
"$\Rightarrow$" T ist injektiv und $T(\alpha) = 0 = T(0)$. Also $\alpha = 0$.

"$\Leftarrow$" Sei $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$, dann $T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$, i.e. $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$.
Also $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. $\square$

Satz 14.6.
$\dim V = n, V$ ein K-Vektorraum, $\Rightarrow V \backsimeq K^n$.

Beweis
Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis. Definiere $T : V \to K^n$
$\alpha \mapsto \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}$
:= Koordinaten-Tupel von α bezüglich $\mathcal{B}$.

$T(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} T(\alpha) + T(\beta)$.

Sei $\alpha = \sum x_i \alpha_i, \beta = \sum y_i \alpha_i, \alpha + \beta = \sum (x_i + y_i)\alpha_i$ eindeutig $\Rightarrow T(\alpha + \beta) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$.

Analog $T(c\alpha) = cT(\alpha)$.
$T(\alpha) = (0, \ldots, 0) \Rightarrow \alpha = 0$, weil $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
So T injektiv.

Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$. Setze $\alpha := \sum x_i \alpha_i \in V$. Es gilt $T(\alpha) = (x_1, \ldots, x_n)$.
So T surjektiv. $\square$

Notation
Koordinaten Spaltenmatrix von α bezüglich $\mathcal{B}$:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$