Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
20.12.2011
Zettel 9

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Sei $\Theta \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Die Spalten der Matrix $M_\Theta := \begin{pmatrix} cos(\Theta) & -sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{pmatrix}$ bilden für jedes Θ eine Basis B_Θ von $\mathbb{R}^2$.

b) Seien Θ_1 und Θ_2 aus $\mathbb{R}$. Finden Sie die Matrix des Basiswechsels zwischen B_{Θ_1} und B_{Θ_2}.

Aufgabe 2: Wir betrachten die 5×5-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie eine invertierbare Matrix P so, dass PA in reduzierter Zeilenstufenform ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Zeilenraumes W von A.

c) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix eines Vektors $(b_1, .., b_5) \in W$ in der angeordneten Basis, die Sie in b) gewählt haben.

d) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Vektorraumes V aller 5×1-Spaltenmatrizen X mit $AX = 0$.

e) Für welche $Y \in Mat_{5\times 1}(\mathbb{R})$ hat $AX = Y$ eine Lösung X?

Aufgabe 3: Es sei W der durch die Vektoren

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= (1,2,2,1) \\ \alpha_2 &:= (0,2,0,1) \\ \alpha_3 &:= (-2,0,-4,3) \end{aligned}$$

aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.
Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &:= (1,0,2,0) \\ \alpha'_2 &:= (0,2,0,1) \\ \alpha'_3 &:= (0,0,0,3) \end{aligned}$$

Und ferner $B := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B' := (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$.
a) Zeigen Sie: B und B' sind Basen von W.
b) Sei $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$. Was sind die Koordinaten von β relativ zur (angeordneten) Basis $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$?
c) Zu $\beta \in W$ sei X die Koordinatenmatrix von β relativ zu B und X' die Koordinatenmatrix von β relativ zu B'. Finden Sie $P \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ so, dass $X = PX'$ für jedes solche β.

Aufgabe 4: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine $n \times n$-Matrix A invertierbar ist, falls ihre Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Zeigen Sie die Umkehrung: Ist A invertierbar, so sind die Zeilenvektoren von A linear unabhängig.

Aufgabe 5: Führen Sie den in der Vorlesung skizzierten Beweis für folgenden Satz aus:
Ist K ein Körper, sind $R, R' \in Mat_{m\times n}(K)$ in reduzierter Zeilenstufenform und ist der Zeilenraum von R gleich dem Zeilenraum von R', so ist $R = R'$.

Zusatzaufgabe für kulinarisch Interessierte: Es sei
$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -77\frac{1}{2} \\ 205 \\ 92\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}v$. Ferner sei d die Anzahl der Lösungen für $Ax = 0$, $3e$ die Dimension des durch die Spalten von A aufgespannten Unterraumes von $\mathbb{R}^3$ und f die Anzahl der Paare $\{p_1, p_2\}$, wobei p_1 und p_2 Primzahlen sind und $p_1 + 1 = p_2$.
Geben Sie nun b Gramm Butter, e Eier, c Gramm Zucker und f Päckchen Vanillinzucker mit d EL Wasser in eine Schüssel und schlagen Sie das Gemisch schaumig. Fügen Sie dabei a Gramm Mehl hinzu. Rollen Sie den Teig glatt

aus, stechen Sie Formen heraus und backen Sie sie im vorgeheizten Backofen bei ca. 150 Grad zwischen 10 und 14 Minuten lang. Kosten Sie das Ergebnis. (2 Punkte zusätzlich, wenn Sie frische, nach diesem Rezept hergestellte Plätzchen ins erste Tutorium nach der Vorlesungspause mitbringen.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 10.01.2012, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.

Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1.) Sei $ggT(a, b) = 1$, $n \geq a \cdot b$. Zeigen Sie: Es existieren $x, y \in \mathbb{N}$ so, dass $a \cdot x + b \cdot y = n$.

2.) Sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ und einem neutralen Element 0. Außerdem gelte $a \circ x = a \circ y \to x = y$ und $x \circ a = y \circ a \to x = y$ für alle a,x,y aus G.
a) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ Gruppe ist, falls G endlich ist.
b) Finden Sie ein Beispiel für ein unendliches $(G, \circ)$, das keine Gruppe ist.

3.) Sei $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$. In Aufgabe 1d) von Zettel 1 wurde gezeigt, dass die Menge aller Bijektionen von M nach M zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ (gegeben durch $f \circ g(x) = f(g(x))$) als Verknüpfung eine (i.a. nichtabelsche) Gruppe ist. Wir setzen nun $(\{f : M \to M | M$ bijektiv$\}, \circ) =: Sym_n$ genannt symmetrische Gruppe vom Grad n. Die Elemente von Sym_n heißen Permutationen. Permutationen der Form $\sigma_{ij} \in Sym_n$ mit $1 \leq i < j \leq n$, gegeben durch $\sigma_{ij}(i) = j$, $\sigma_{ij}(j) = i$ und $\sigma_{ij}(k) = k$ für $k \notin \{i, j\}$ heißen Transpositionen.
a) Zeigen Sie: Jede Permutation ist darstellbar als Produkt endlich vieler Transpositionen.
b) Zeigen Sie nun: Sind $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ und $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m\}$ Mengen von Transpositionen in Sym_n und ist $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ ... \circ \sigma_n = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_m$, so ist $m - n$ gerade.

4.) Sei $A = (a_{ij})$ reelle $n \times n$-Matrix, so dass $\Sigma_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ für $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

5.) Ist K ein Körper, $A \in Mat_{n \times n}(K)$, so heißt A^τ, gegeben durch $A^\tau_{ij} = A_{ji}$ die Transponierte von A. Zeigen Sie: A ist invertierbar gdw. die Transponierte von A invertierbar ist und es gilt: $(A^\tau)^{-1} = (A^{-1})^\tau$.

6.) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren $f, g, h \in Fkt(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind:
a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = sin(x)$, $h(x) = x^2$
b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x^2}$, $h(x) = x$
c) $f(x) = 2^2$, $g(x) = sin(x)$, $h(x) = cos(x)$

7.) Sei K ein Körper. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Menge der Lösungen eines homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit
$A \in Mat_{n \times n}(K)$ einen Unterraum des K-Vektorraumes K^n bildet. Zeigen Sie nun umgekehrt: Ist V ein K-Vektorraum mit Unterraum W, so existiert eine Matrix A_W so, dass W der Lösungsraum von $A_W x = 0$ ist.