Fachbereich Mathematik und Statistik — WS 11/12
der Universität Konstanz — 13.12.2011
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl — Zettel 8

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $dim(V) = n$. $X \subseteq V$ heißt minimal erzeugend, falls $span(X) = V$ und $span(X \setminus \{y\}) \neq V$ für alle $y \in X$. $X \subseteq V$ heißt maximal linear unabhängig, falls X linear unabhängig und $X \cup \{y\}$ linear abhängig für alle $y \in V \setminus X$. Zeigen Sie:
a) Ist $X \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge mit n Elementen, so ist X Basis von V.
b) Ist $X \subseteq V$ so, dass $span(X) = V$, so existiert $Y \subseteq X$ so, dass Y Basis von V ist.
c) Hat $X \subseteq V$ n Elemente und ist $span(X) = V$, so ist X Basis von V.
d) Die folgenden Aussagen sind äquivalent für jedes $X \subseteq V$:

- (1) X ist maximal linear unabhängig.
- (2) X ist minimal erzeugend.
- (3) X ist Basis von V.

Aufgabe 2: Wir betrachten $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$, die Menge der Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{F}_2$. Zu $x \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ definieren wir $supp(x) := \{i \in \mathbb{N} | x(i) = 1\}$, genannt Support von x. $\mathbb{F}_2^{<\mathbb{N}}$ sei die Menge der Elemente von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ mit endlichem Support. Zeigen Sie:
a) $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ bildet zusammen mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{F}_2$. Ferner ist $\mathbb{F}_2^{<\mathbb{N}}$ Unterraum von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$.
b) $\mathbb{F}_2^{<\mathbb{N}}$ besitzt keine endliche Basis als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.
c) Für $i \in \mathbb{N}$ sei $f_i(j) := \delta_{ij}$. Dann ist $\{f_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^{<\mathbb{N}}$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 20.12.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.