Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
29.11.2011
Zettel 6

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Entscheiden Sie (mit Beweis!) die folgenden Aussagen. Achten Sie auf die Form des Beweises - machen Sie insbesondere deutlich, was Voraussetzung, Behauptung und Folgerung ist. Wie üblich bezeichnet K einen Körper, $Mat_{m\times n}(K)$ den Vektorraum der $m\times n$-Matrizen über K, $Fkt(\mathbb{R},\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

a) Sei INV_n die Menge der invertierbaren $n\times n$-Matrizen über K. Dann ist INV_n Unterraum von $Mat_{n\times n}(K)$.

b) Sei $NINV_n$ die Menge der nicht-invertierbaren $n\times n$-Matrizen über K. Dann ist $NINV_n$ Unterraum von $Mat_{n\times n}(K)$.

c) Sei $A\in Mat_{n\times n}(K)$. Dann ist $\{B\in Mat_{n\times n}(K)|AB=BA\}$ Unterraum von $Mat_{n\times n}(K)$.

d) $\{(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n|a_1>0\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

e) $\{(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n|a_1+3a_2=a_3\}$ ist für $n\geq 3$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

f) $\{(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n|a_2=a_1^2\}$ ist Unterraum $\mathbb{R}^n$.

g) $\{f|f(x^2)=(f(x))^2\}$ ist Unterraum von $Fkt(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

h) $\{f|f(-1)=0\}$ ist Unterraum von $Fkt(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

i) $\{f|f(-1)=1\}$ ist Unterraum von $Fkt(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

j) $(3,-1,0,-1)\in\mathbb{R}^4$ ist Element von $span(\{(2,-1,3,2),(-1,1,1,-3),(1,1,9,-5)\})$.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: $X_1:=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f(x)=f(-x)\}$ und $X_2:=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f(x)=-f(-x)\}$ sind Unterräume von $Fkt(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
b) Bestimmen Sie X_1+X_2 und $X_1\cap X_2$.

Aufgabe 3: Es sei $J\subseteq Mat_{n\times n}(K)$ eine Menge mit mindestens zwei Elementen von $n\times n$-Matrizen über einem Körper K, die unter Matrixaddition abgeschlossen ist, so dass für alle $A\in J$ und **alle** $n\times n$-Matrizen X gilt, dass $XA\in J$ und $AX\in J$. Zeige: $J=Mat_{n\times n}(K)$.

Aufgabe 4: Es seien W_1 und W_2 Unterräume eines Vektorraumes V über einem Körper K so, dass $W_1 + W_2 = V$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Zeigen Sie: Zu jedem $v \in V$ existieren eindeutig bestimmte $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$, so dass $v = v_1 + v_2$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Ist M eine Menge, $\cdot : M \times M \to M$ eine Verknüpfung auf M, so heißt
$Z := \{x \in M \mid \forall g \in M (x \cdot g = g \cdot x)\}$ das Zentrum von $(M, \cdot)$.
a) Zeigen Sie: Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe und Z ihr Zentrum, so ist $(Z, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.
b) Sei K ein Körper. Finden Sie das Zentrum von $(Mat_{n\times n}(K), \cdot)$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 06.12.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.