Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
22.11.2011
Zettel 5

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen über den jeweiligen Körpern:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{F}_2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{F}_{13}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$

Aufgabe 2: a) Es seien A und B Matrizen der Dimensionen $m \times n$ und $n \times k$ über einem Körper. Weiter bezeichne S_j^B die j-te Spalte von B, S_j^{AB} die j-te Spalte von AB. Zeigen Sie: $AS_j^B = S_j^{AB}$.

b) Sei K ein Körper. Für $c \in K^\times$ bezeichne e_c^i die zweite elementare Zeilenumformung, d.h. diejenige Abbildung, die einer $m \times n$-Matrix A über K mit $m \geq i$ Zeilen diejenige Matrix $\tilde{A}$ zuordnet, die aus A entsteht, indem man alle Einträge der i-ten Zeile mit c multipliziert; d.h. für

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ & & \dots & \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} \\ & & \dots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \text{ ist } e_c^i(A) = \tilde{A} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ & & \dots & \\ cx_{i1} & cx_{i2} & \dots & cx_{in} \\ & & \dots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Sei nun außerdem E gegeben durch: $E_{ii} = c$ und $E_{kl} = \delta_{kl}$ für $(k, l) \neq (i, i)$, wobei $1 \leq k, l \leq m$.
Zeigen Sie: Für jede $m \times n$-Matrix A gilt $e_c^i(A) = EA$.

Aufgabe 3: Es seien A und B Matrizen der Dimension $n \times n$ über einem Körper K, I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix. A heißt linksinvers zu B, falls $AB = I_n$, und in diesem Fall heißt auch B rechtsinvers zu A. Zeigen Sie: Ist A linksinvers zu B, so ist A auch rechtsinvers zu B, d.h. für $AB = I_n$ ist auch $BA = I_n$.

Aufgabe 4: Die Fibonaccifolge $(F_n | n \in \mathbb{N})$ ist definiert durch $F_0 = F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \geq 0$. Ferner sei für eine $m \times m$-Matrix A und $k \in \mathbb{N}$ die k-te Potenz von A definiert durch $A^0 = I_m$ und $A^{k+1} = A^k \cdot A$.
Zeigen Sie: Für $n > 1$ ist
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien A und B quadratische Matrizen so, dass $AB + A + B = 0$. Zeigen Sie, dass dann $AB = BA$ gilt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 29.11.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.