Fachbereich Mathematik
der Universität Konstanz
S. Kuhlmann, M.Carl

WS 11/12
01.11.2011
Zettel 2

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Bestimmen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus und seiner Umkehrung:
a) $ggT(190, 57)$
b) x und y aus $\mathbb{Z}$ so, dass $188x + 158y = 2$
c) Das multiplikative Inverse von 5 in $\mathbb{Z}_{17}$.
d) Das multiplikative Inverse von 7 in $\mathbb{Z}_{25}$.
Geben Sie die Zwischenschritte an!

Aufgabe 2: Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element 1_G.
a) Sei $G = \{1, 2, 3\}$. Wie viele $\cdot : G \times G \to G$ gibt es, so dass $(G, \cdot)$ Gruppe ist? (Die Antwort ist zu beweisen.)
b) Sei nun G abelsch. Zeigen Sie: Es gilt $1_G = \Pi_{g \in G} g^2$. ($\Pi_{g \in G} g$ ist das Produkt aller Elemente von G, $x^2 := x \cdot x$ für $x \in G$.)

Aufgabe 3: Es sei $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ definiert wie in der Vorlesung.
a) Zeigen Sie: $\cdot_n$ ist assoziativ, d.h. $a \cdot_n (b \cdot_n c) = (a \cdot_n b) \cdot_n c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$.
b) Zeigen Sie: $+_n$ ist distributiv über $\cdot_n$, d.h. $a \cdot_n (b +_n c) = a \cdot_n b +_n a \cdot_n c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie:
Es sei $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt $p|ab \to (p|a \vee p|b)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn p eine Primzahl ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Beweisen Sie:
Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist $ggT(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{ggT(n,m)} - 1$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 08.11.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.