Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
17.01.2012
Zettel 11

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Sei K ein Körper.
a) Sei ferner $A \in Mat_{n\times m}(K)$. Wir definieren $U_A : K^m \to K^n$ durch $U_A(\alpha) = \alpha A$. Zeigen Sie, dass U_A für jedes A linear ist und finden Sie die Matrixdarstellung von U_A bezüglich der Standardbasen von K^m und K^n.
b) Sei $\mathbb{B}_1 := \{(0,2,1),(0,1,2),(1,0,1)\}$ und $\mathbb{B}_2 := \{(-1,1,1),(-2,0,3),(0,3,2)\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind und bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Identitätsfunktion $id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $id(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, bezüglich der Basen $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper.

a) Betrachten Sie $f : K^{5\times 1} \to K^{5\times 1}$, gegeben durch $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Standardbasis von $K^{5\times 1}$.
b) Sei nun zu $\pi : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ bijektiv $f_\pi : K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$ gegeben durch $f_\pi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ ... \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$. Finden Sie auch hier die Matrixdarstellung von f_π bezüglich der Standardbasis von $K^{n\times 1}$.

c) Es sei $\mathbb{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis von $K^{4\times 1}$ nach $\mathbb{B}$.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.
a) Sei W Unterraum von V. Zeigen Sie: Es existiert ein Unterraum U von V so, dass $W \cap U = \{0\}$ und $W + U = V$.
b) Beweisen oder widerlegen Sie durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels: Der Unterraum U aus a) ist eindeutig.
c) Es seien nun W_1 und W_2 beliebige Unterräume von V der Dimensionen k und l. Bekanntlich ist dann $W_1 \cap W_2$ ebenfalls Unterraum von V. Zeigen Sie: $dim(W_1 \cap W_2) \geq (k + l - n)$.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V, W jeweils n-dimensionale K-Vektorräume, $T : V \to W$ linear. Wir betrachten folgende Aussagen:
(1) T ist invertierbar
(2) T regulär
(3) $Im(T) = W$.
(4) Ist $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ eine beliebige Basis von V, so ist $\{T(\beta_1), ..., T(\beta_n)\}$ Basis von W.
(5) Es existiert eine Basis $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ von V, so dass $\{T(\beta_1), ..., T(\beta_n)\}$ Basis von W ist.
In der Vorlesung wurde gezeigt: (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (3). Zeigen Sie nun, dass (1), (2) und (3) auch zu (4) und (5) äquivalent sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein Körper, R ein Ring mit $1 \neq 0$, ferner $\odot : K \times R \to R$ eine Funktion so, dass folgendes gilt:
1.) Die additive Gruppe von R bildet zusammen mit dem Skalarbereich K und der skalaren Multiplikation $\odot$ einen K-Vektorraum.
2.) Für alle $x, y, z \in R$, $\delta \in K$ ist $\delta \odot (xy) = (\delta \odot x)y = x(\delta \odot y)$.
a) Zeigen Sie: $(K, R, \odot)$ ist eine K-Algebra.
b) Zeigen Sie: Jede K-Algebra ist von der Form $(K, R, \odot)$ mit K, R und $\odot$ wie oben.
c) Sei nun V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Bekanntlich bildet dann $L(V, V)$ eine K-Algebra. Sei nun gemäss b) $L(V, V) = (K, R, \odot)$. Dann ist also R ein Ring. Bestimmen Sie die Einheitengruppe von R.
d) Zeigen Sie: $Mat_{n\times n}(K)$ bildet zusammen mit der Matrizenaddition und -multiplikation und der skalaren Multiplikation von Matrizen eine K-Algebra.

Seien A_1 und A_2 K-Algebren. $\rho : A_1 \to A_2$ heißt Isomorphismus von K-Algebren, wenn ρ ein Isomorphismus der entsprechenden Vektorräume ist und für alle $a, b \in A_1$ gilt, dass $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$.

e) Sei V wie in c), $\mathbb{B}$ eine Basis von V. Sei $\rho : L(V, V) \to Mat_{n\times n}$ diejenige Funktion, die einem Element f von $L(V, V)$ seine Matrixdarstellung zur Basis $\mathbb{B}$ zuordnet. Zeigen Sie, dass ρ ein Isomorphismus von K-Algebren ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 24.01.2012, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.