Fachbereich Mathematik und Statistik — WS 11/12
der Universität Konstanz — 10.01.2012
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl — Zettel 10

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1:
a) Es sei K ein Körper und $T : K^2 \to K^2$ gegeben durch $T((x_1, x_2)) = (x_1, 0)$. Zeigen Sie, dass T linear ist und bestimmen Sie die Matrixdarstellung von T bezüglich der Standarbasis von K^2.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome P mit reellen Koeffzienten in einer reellen Variablen x und $deg(P) \leq n$. Außerdem setzen wir $D(P) = P'$, wobei P' die Ableitung von P nach x bezeichnet. Zeigen Sie, dass D eine lineare Funktion von V nach V ist und bestimmen Sie die Matrix von D bezüglich der (angeordneten) Basis $\mathfrak{B} := \{x^0, ..., x^n\}$ von V.

Aufgabe 2: Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome P in einer Variablen x mit reellen Koeffizienten. Wir definieren die Funktionen $T : V \to V$ und $D : V \to V$ durch $T(P) = xP$ und $D(P) = P'$, wobei P' die Ableitung von P nach x bezeichnet.
a) Zeigen Sie: D und T sind linear auf V. Bestimmen Sie $TD - DT$.
b) Zu $F : V \to V$ heißt $G : V \to V$ rechtsinvers bzw. linksinvers, falls $F \circ G = id$ bzw. $G \circ F = id$. Entscheiden Sie (mit Beweis) ob D und T Rechts- oder Linksinverse besitzen.
c) Entscheiden Sie nun, ob die in b) gefundene(n) Umkehrfunktion(en) linear sind.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper. Zu $M \in Mat_{n\times n}(K)$ sei $tr(M) = \Sigma_{i=1}^{n} A_{ii}$, genannt die Spur von M. Zeigen Sie:
a) $tr : Mat_{n\times n}(K) \to K$ ist K-linear.
b) Für alle $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ ist $tr(AB) = tr(BA)$.
c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Genau dann existiert zu jedem $A \in Mat_{n\times n}(K)$ ein $a \in K$ mit $tr(A - aI_n) = 0$, wenn $char(K)$ kein Teiler von n ist.

Aufgabe 4: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $M \in Mat_{m\times n}(K)$. Der Spaltenrang von M, $sr(M)$, ist die Dimension des Spaltenraumes von M (also des von den Spaltenvektoren von M aufgespannten K-Vektorraumes), der Zeilenrang, $zr(M)$, die Dimension des Zeilenraumes.
Zeigen Sie: Für jedes M ist $zr(M) = sr(M)$.
(Tipp: Dimensionsformel)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, W und V K-Vektorräume der Dimensionen m bzw. n und $f : V \to W$ und $g : V \to W$ linear. Außerdem setzen wir $dim(Im(f)) = m'$ und $dim(Im(g)) = n'$.
Zeigen Sie:
$|m' - n'| \leq rang(f + g) \leq m' + n'$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 17.01.2012, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.