Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
13.12.2011

Übungsklausur zur Linearen Algebra 1

Bitte bearbeiten Sie die folgenden 3 Aufgaben unter realistischen Klausurbedingungen mit einem Zeitlimit von 90 Minuten. Arbeiten Sie insbesondere allein und ohne Zuhilfenahme von Büchern, Mitschriften etc. Nur so gelangen Sie zu einer realistischen Selbsteinschätzung.

Aufgabe 1:
a) Bestimmen Sie mit dem euklidischen Algorithmus die multiplikativen Inversen von 5 und 7 in $\mathbb{F}_{11}$. Geben Sie die Zwischenschritte an.
b) Lösen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{F}_{11}$:

$$x + 10y - 22z = 0 \qquad (1)$$
$$3x + y + z = 12 \qquad (2)$$
$$7x + 4y + 2z = 4 \qquad (3)$$

c) Bestimmen Sie das Inverse der folgenden Matrix über $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ 0 & 2 & 2 \\ -3i & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Ist $\{(1,2,0),(1,2,1),(4,0,1)\}$ eine Basis des $\mathbb{F}_5$-Vektorraumes $\mathbb{F}_5^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.
e) Entscheiden Sie (mit Beweis) die folgende Aussage: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien W_1 und W_2 Unterräume von V so, dass $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Ferner seien $\{\beta_1^1, ..., \beta_n^1\}$ bzw. $\{\beta_1^2, ...\beta_m^2\}$ Basen von W_1 bzw. W_2. Dann ist $\{\beta_1^1, ..., \beta_n^1, \beta_1^2, ..., \beta_m^2\}$ Basis von V.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie folgende Aussagen für alle $X, Y \subseteq V$:
a) $X \subseteq span(X)$.
b) $X \subseteq Y \implies span(X) \subseteq span(Y)$.
c) $span(span(X)) = span(X)$. d) Ist $x \in span(X)$, so existiert eine endliche Teilmenge $\bar{X} \subseteq X$ so, dass $x \in span(\bar{X})$.
e) Ist $x \in span(X \cup \{y\}) \backslash span(X)$, so ist auch $y \in span(X \cup \{x\})$.

Aufgabe 3
a) Geben Sie die Definition eines Körpers an.
b) Geben Sie die Definition eines Integritätsbereiches an.
Entscheiden Sie nun folgende Aussagen (mit Beweis bzw. Gegenbeispiel):
c) Jeder Körper ist ein Integritätsbereich.
d) Jeder Integritätsbereich ist ein Körper.
e) Es gibt einen Körper mit Charakteristik 4.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 20.12.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.