Lösungen und Lösungshinweise zur Übungsklausur

Zusammenfassung

Im Folgenden einige Lösungen und Lösungshinweise zur Übungsklausur. Solltet ihr weitere Fragen haben, mailt eurem Tutor oder an: merlin.carl@uni-konstanz.de.

1 Aufgabe 1

a) **Behauptung**:
i) Das Inverse zu 5 in $\mathbb{F}_{11}$ ist 9.
ii) Das Inverse zu 7 in $\mathbb{F}_{11}$ ist 8.

Beweis: (i) 5 ist invertierbar in $\mathbb{F}_{11}$, denn es gilt mit dem euklidischen Algorithmus:

$$\mathrm{ggT}(5, 11) = \mathrm{ggT}(5, 11 - (2 \cdot 5)) = \mathrm{ggT}(5, 1) = 1.$$

Es folgt, dass $11 - 2 \cdot 5 = 1$ ist, also

$$\overline{11 - 2 \cdot 5} = \overline{9 \cdot 5} = \overline{1},$$

also ist $9 = 5^{-1}$ in $\mathbb{F}_{11}$.
(ii) 7 ist invertierbar in $\mathbb{F}_{11}$, denn es gilt wie oben:

$$\mathrm{ggT}(7, 11) = \mathrm{ggT}(7, \underbrace{11 - 7}_{4}) = \mathrm{ggT}(\underbrace{7 - (11 - 7)}_{3}, \underbrace{11 - 7}_{4}) = \mathrm{ggT}(3, \underbrace{(11 - 7) - (7 - (11 - 7))}_{1}) = 1.$$

Es folgt, dass $(11 - 7) - (7 - (11 - 7)) = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7 = 1$ ist, also

$$\overline{2 \cdot 11 - 3 \cdot 7} = \overline{8 \cdot 7} = \overline{1},$$

also $8 = 7^{-1}$ in $\mathbb{F}_{11}$.

b) Voraussetzung: Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 10y - 22z &= 0 \\ 3x + y + z &= 12 \\ 7x + 4y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

über $\mathbb{F}_{11}$.
Behauptung: Die Lösungsmenge ist $\{(8,8,2) \in \mathbb{F}_{11}^3\}$.
Beweis: Durch Gaußalgorithmus mit der erweiterten Koeffizientenmatrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 1 & 1 \\ 0 & 44 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +8z_1 \\ +4z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Aus der Gleichung $2z = 4$ folgt $z = 2$. Damit folgt aus der zweiten Zeile $4y+2 = 1$, also $4y = 10$ und $y = 8$. Die erste Zeile ergibt dann $x+80 = 0$, also $x+3 = 0$, was $x = 8$ bedeutet.

c) Voraussetzung: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ 0 & 2 & 2 \\ -3i & -3 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

Behauptung: Die Inverse von A in $Mat_{3\times 3}(\mathbb{C})$ ist

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{11}{10}i & -\frac{1}{5}i \\ -\frac{3}{5}i & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5}i & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Beweis: Durch Gaußalgorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3i & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 3i & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +3iz_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3i & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +3z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5}i & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 0 & \frac{11}{5} & -\frac{6}{5}i & -\frac{2}{5}i \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5}i & \frac{1}{2}-\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5}i & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} -2iz_3 \\ -z_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5}i+\frac{1}{10}i & -\frac{1}{5}i \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5}i & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5}i & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} -iz_2 \\ \\ \end{array}$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{11}{10}i & -\frac{1}{5}i \\ -\frac{3}{5}i & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5}i & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

wie behauptet.

d) **Behauptung:** $(1,2,0),(1,2,1),(4,0,1)$ ist eine Basis von $\mathbb{F}_5^3$.

Beweis: Durch Nachrechnen zeigt man, dass die Vektoren linear unabhängig sind. $\mathbb{F}_5^3$ hat Dimension 3, also spannen die drei linear unabhängigen Vektoren bereits eine Basis auf.

e) **Voraussetzungen**: Sei K ein Körper, V ein Vektorraum über K, W_1, W_2 Unterräume von V mit $W_1 + W_2 = V, W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Sei $B_1 := \{\beta_1^1, ..., \beta_n^1\}$ Basis von W_1 und $B_2 := \{\beta_1^2, ..., \beta_m^2\}$ Basis von W_2.

Behauptung: $B_1 \cup B_2$ ist Basis von V.
Beweis:

Zu zeigen: $B_1 \cup B_2$ ist erzeugend und linear unabhängig.

Wegen $W_1 + W_2 = V$ gibt es zu beliebigem $v \in V$ Vektoren $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$, so dass $v = w_1 + w_2$ ist. Dann ist w_1 Linearkombination von B_1, d.h. $w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \beta_i^1$ mit $\lambda_i^1 \in K$, und analog $w_2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \beta_i^2$, also ist $v = w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \beta_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \beta_i^2 \in \text{Span}(B_1 \cup B_2)$, also erzeugt $B_1 \cup B_2$ ganz V.

Seien $\lambda_i^1, \lambda_i^2 \in K$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \beta_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \beta_i^2 = 0$. Nun folgt: $W_1 \ni \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \beta_i^2 = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \beta_i^2 \in W_2$. Wegen $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ muss also $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \beta_i^2 = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \beta_i^2 = 0$ sein. Da B_1 und B_2 jeweils Basen sind, müssen dann bereits alle $\lambda_i^1, \lambda_i^2 = 0$ sein, also ist $B_1 \cup B_2$ linear unabhängig.

2 Aufgabe 2

Erinnere: Ist K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $X \subset V$, so ist $span(X)$ der $\subset$-minimale Unterraum von V, der X als Teilmenge umfasst. Äquivalent ist $span(X)$ die Menge aller Linearkombinationen von Elementen von X. Wenn dieser Begriff Ihnen nicht klar ist, lesen Sie ihn unbedingt nach - er ist von zentraler Bedeutung für die lineare Algebra.

a) **Voraussetzungen**: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $X \subset V$.

Behauptung: $X \subset span(X)$.

Beweis: Ist $x \in X$, so ist $x = 1 \cdot x$ eine Linearkombination von Elementen von X. Also ist $x \in span(X)$. Da $x \in X$ beliebig war, ist $X \subset span(X)$.

b) **Voraussetzungen**: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $X \subset V$, $Y \subset V$, $X \subset Y$.

Behauptung: $span(X) \subset span(Y)$.

Beweis: Ist $x \in span(X)$, etwa $x = \Sigma_{y \in X} a_y \cdot y$, wobei $a_y \in K$, alle bis auf endlich viele $a_y = 0$, so ist für $X \subseteq Y$ offenbar $x = \Sigma_{y \in Y} b_y \cdot y$, wobei $b_y = a_y$ für $y \in X$ und $b_y = 0$, sonst.

c) **Voraussetzungen**: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $X \subset V$.

Behauptung: $span(span(X)) = span(X)$.

Beweis: Ist $x \in span(span(X))$, so ex. $b_1, ..., b_n \in span(X)$ und $c_1, ..., c_n \in K$ so, dass $x = \Sigma_{i=1}^{n} c_i b_i$. Zu b_i ex. ferner $a_1^i, ..., a_{n_i}^i$ und $c_1^i, ..., c_{n_i}^i$ so, dass, $b_i = \Sigma_{j=1}^{n_i} c_j^i a_j^i$. Damit ist $x = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \Sigma_{j=1}^{n_i} c_j^i a_j^i)$. Ausmultiplizieren und Zusammenfassen nach gleichen Elementen von X liefert die gewünschte Linearkombination aus Elementen von X.

d) **Voraussetzungen**: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $X \subset V$, $x \in span(X)$.

Behauptung: Es existiert $\bar{X} \subset X$, $\bar{X}$ endlich, so, dass $x \in span(\bar{X})$.

Beweis (Idee): $x \in span(X)$ ergibt sich als Linearkombination von Elementen von X, wobei nur endlich viele Koeffizienten von 0 verschieden sind. Nur die zu diesen gehörigen endlich vielen Elemente von X sind zur Erzeugung nötig.

Bemerkung: In zahlreichen Bearbeitungen wurde offenbar vorausgesetzt, dass X selbst endlich ist. Bitte wiederholen Sie in diesem Fall die Definition von *span*: $span(X)$ ist für beliebige Teilmengen eines Vektorraumes erklärt und macht keine Voraussetzungen über die Größe von X.

e) **Voraussetzungen**: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $X \subset V$, $x, y \in V$, $x \in span(X \cup y) \backslash span(X)$.

Behauptung: $y \in span(X \cup \{x\})$.

Beweis: $x \in span(X \cup \{y\}) \backslash span(X)$ bedeutet: Es existieren $\{c_v | v \in X\} \subseteq K$, alle bis auf endlich viele 0, und $c \in K$ so, dass $x = cy + \Sigma_{v \in X} c_v v$. Da $x \notin span(X)$, ist $c \neq 0$. Damit $y = c^{-1}(x - \Sigma_{v \in X} c_v v$. Dann ist also $x = cy + \Sigma_{v \in x} c_v v \in span(X \cup \{x\})$, wie gewünscht.

3 Aufgabe 3

a) Siehe Skript.
b) Siehe Skript.
c) Wären $x, y \in K$ von 0 verschieden so, dass $xy = 0$, so ergibt Linksmultiplikation mit x^{-1} und Rechtsmultiplikation mit y^{-1} sofort $1 = 0$, was den Körperaxiomen widerspricht.
d) Falsch. $\mathbb{Z}$ ist ein Gegenbeispiel.
e) Falsch. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass endliche Charakteristiken von Körpern stets Primzahlen sind.