Gesamtscript zur Vorlesung
Lineare Algebra II

Prof.'in Dr. Salma Kuhlmann

Inhaltsverzeichnis für das Gesamtskript[1] zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL I: POLYNOMALGEBREN.

KAPITEL II: MULTILINEARFORMEN UND DETERMINANTEN.

[1]Die Seitenzahlen in Klammern geben die Seitenzahl für die Suche mit Adobe Acrobat Reader an (unter dem Menü ANZEIGE – GEHE ZU – SEITE).

KAPITEL III: NORMALFORMEN.

KAPITEL IV: EUKLIDISCHE UND UNITÄRE RÄUME.

1 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL I: POLYNOMALGEBREN.

In Kapitel I (Skripte 1 bis 5) werden wir die Polynomalgebra und ihre Eigenschaften näher kennenlernen. Diese Begriffe und Kenntnisse werden wir in dieser Vorlesung (insbesondere in Kapitel II und III) weiter benötigen.

§ 1 Algebren

Erinnerung 1.0
Sei K ein Körper. Eine *K-Algebra* $\mathcal{A}$ ist ein K-Vektorraum mit einer Multiplikation von Vektoren:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta,$$

so dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $c \in K$ gilt:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Falls es $1 \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ gilt, dann heißt die Algebra eine *Algebra mit Einheit*.

Falls gilt $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ heißt $\mathcal{A}$ eine *kommutative Algebra*.

Beispiel 1.1.
$\mathcal{A} := M_{n\times n}(K)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit.

Beispiel 1.2.
$\mathcal{A} := L(V, V)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit.

Beispiel 1.3. (Potenzreihen Algebra)
Betrachte:
• $K^{\mathbb{N}_0} := \{f; f : \mathbb{N}_0 \to K, f \text{ Abbildung }\}$
• Schreibe $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (f_0, f_1, \ldots)$
• Addition punktweise, i.e. $(f + g)_n := f_n + g_n$ $(*)$
• Skalarmultiplikation, auch punktweise : $(cf)_n := cf_n$
• Produkt: $(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $(**)$

Proposition 1.4.
$\mathcal{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit den Verknüpfungen (wie in $(*)$ und $(**)$ erklärt) ist eine kommutative Algebra mit Einheit.

Beweis:
• In Lineare Algebra I (Skript 13) haben wir die Axiome der K-Vektorräume für $K^{\mathbb{N}_0}$ bereits bewiesen. Wir berechnen nun:

• kommutatives Produkt: $(gf)_n = \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = (fg)_n$.

• assoziatives Produkt:
$$\begin{aligned}\big[(fg)h\big]_n &= \sum_{i=0}^{n}(fg)_i h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\Big) h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} h_{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j} = \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{(n-j)-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j (gh)_{n-j} \\ &= \big[f(gh)\big]_n.\end{aligned}$$

• Zeigen Sie dass $1 := (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ eine **Einheit** ist. Auch die übrigen Axiome (b) und (c) werden ihnen als ÜA, ÜB überlassen.

Notation:
$x := (0, 1, 0, \ldots)$ $\qquad x^0 := 1$ $\qquad x^n := x \cdots x$ (n-mal)

Proposition 1.5.
(1) $x^k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (1 ist die k-te Stelle) für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(2) $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ sind linear unabhängig. Also ist $K^{\mathbb{N}_0}$ unendlich dim.

Beweis
Bereits in Linear Algebra I Korollar 13.5 geführt.

Definition 1.6. und Notation
$\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K.
Sie wird bezeichnet als $\mathcal{A} := K[[x]]$.

Warum Potenzreihen? Formale Schreibweise: $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

§ 2 Die Polynomalgebra

Notation
$K[x] := \operatorname{span}\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Definition 1.7.

1. $f \in K[x]$ heißt *Polynom über K*.
2. Sei nun $f \neq 0$, $f \in K[[x]]$. Es gilt: $f \in K[x]$ genau dann, wenn es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ exisitert mit $f_n \neq 0$ und $f_k = 0$ für alle $k > n$. Wir setzen $\deg f := n$, der *Grad von f* ist n.
3. Wenn $\deg f = n$, dann ist $f = f_0x^0 + f_1x^1 + \cdots + f_nx^n$; $f_n \neq 0$. Die f_i heißen *Koeffizienten von f*.

Definition 1.8.

1. Ein Polynom dergestalt $f = f_0x^0$ ist ein *Skalarpolynom* ($\deg f = 0$ oder $f = 0$).
2. Ein Polynom $f \neq 0$ ist *normiert*, falls $\deg f = n$ und $f_n = 1$.

2 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem zweitem Skript werden wir zunächst Polynome als Potenzreihen mit endlichem Support wieder erkennen (also $K[x] \subset K[[x]]$). Wir werden dann diese Beobachtung ausnutzen um zu zeigen dass $K[x]$ ebenfalls eine kommutative Algebra mit Einheit ist. Danach werden wir Polynome als Funktionen ansehen. Wir untersuchen ganz genau die Beziehung zwischen das Polynom f und die Polynomfunktion $\tilde{f}$.

Bemerkung 2.0.
Sei $f \in K[[x]]$. Definiere Support $f := \{n \in \mathbb{N}_0; f_n \neq 0\}$. Die folgende Eigenschaften folgen unmittelbar aus den Definitionen:

(i) Support $f = \emptyset$ genau dann, wenn $f = 0$

(ii) Support f ist endlich genau dann, wenn $f \in K[x]$

(iii) Sei $f \neq 0$, $f \in K[x]$; es gilt $\deg f = \max$ Support f.

Satz 2.1.
Seien $f, g \in K[x]$ und $f, g \neq 0$. Es gelten:

(i) $fg \neq 0$

(ii) $\deg\,(fg) = \deg\, f + \deg\, g$

(iii) fg ist normiert, falls f und g normiert sind

(iv) fg ist skalar $\Leftrightarrow$ f und g skalar sind

(v) Falls $f + g \neq 0$, gilt $\deg\,(f + g) \leq \max\,(\deg f, \deg g)$

Beweis:
Setze $\deg f := m$ und $\deg g := n$. Wir erhalten vorab (aus der Definition des Produktes fg):

$$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \Big(\sum_{r=0}^{s} f_r g_{s-r}\Big) x^s \text{ für } f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i \text{ und } g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i.$$

Insbesondere $cx^m dx^m = cdx^{m+n}$ und $fg = \displaystyle\sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq n} f_i g_j x^{i+j}$.

Behauptung: $(*)$ $\quad (fg)_{m+n} = f_m g_n$ und $(**)$ $\quad (fg)_{m+n+k} = 0$, für $k > 0$.

• Wir berechnen $(fg)_{m+n+k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}$.

• Dafür untersuchen wir welche Beträge ungleich Null sind:

• $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow i \leq m, (f_i \neq 0)$ und $m + n + k - i \leq n$ also $m + k \leq i$.
• Das heißt: $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m + k \leq i \leq m$, i.e. $k = 0$ und $m = i$.
• Somit haben wir die Behauptung bewiesen.

- Nun implizieren $(*)$ und $(**)$ unmittelbar (i), (ii) und (iii).
- Auch (i) und (ii) implizieren (iv).
- (v): ÜA, ÜB. $\square$

Korollar 2.2.
$K[x]$ ist eine kommutative K-Algebra mit Einheit.

Beweis:
$K[x]$ ist ein Unterraum von $K[[x]]$. Es genügt also zu prüfen, dass $K[x]$ unter Produkte abgeschlossen ist, i.e. $f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$. Dieses folgt aus Satz 2.1 Punkt (ii). $\square$

Korollar 2.3.
$f, g, h \in K[x]$; $f \neq 0$. Aus $fg = fh$ folgt $g = h$.

Beweis:
$K[x]$ ist ein Integritätsbereich (siehe Satz 2.1 Punkt (i)). $\square$

Definition 2.4.
$f : K \longrightarrow K$ ist eine *polynomiale Funktion*, falls es $c_0, \ldots, c_n \in K$ gibt, so dass $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ für alle $x \in K$.

Eine polynomiale Funktion ist etwas anderes als ein Polynom. Wir werden die Beziehung nun genau analysieren. Dafür brauchen wir eine Definition:

Definition 2.5.
Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit; sei $f \in K[x]$; schreibe $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$; und sei $\alpha \in \mathcal{A}$.

Definiere $f(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$ mit $\alpha^0 := 1$.

Definition 2.6.
Setze $\mathcal{A} = K$. Ein Polynom $f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale Funktion $\tilde{f} : K \longrightarrow K$; $a \in K \mapsto \sum_{i=0}^{n} f_i a^i \in K$.

Beispiel 2.7.
$\mathcal{A} = M_{2\times 2}(K)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f = x^2 + 2$

$f(B) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2.$

Satz 2.8.
Seien $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit, $f, g \in K[x]; \alpha \in \mathcal{A}, undc \in K$. Es gelten

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$

Beweis:
Übungsaufgabe.

Beispiel 2.9.
Sei $\alpha \in K$ fest.

$$\begin{array}{llll} L_\alpha : & K[x] & \longrightarrow & K \\ & f & \longmapsto & f(\alpha) \end{array} \text{ ist eine lineare Funktionale.}$$

Der Beweis für folgende Proposition ist einfach.

Proposition 2.10.
Sei $K[x]^\sim$ der K-Vektorraum der polynomialen Funktionen. Wir versehen $K[x]^\sim$ mit der punktweisen Funktionen Multiplikation: $\forall t \in K; (\tilde{f}\tilde{g})(t) := \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)$.
Dann ist $K[x]^\sim$ ist eine K-Algebra mit Einheit.

Beispiel 2.11.

Sei $K = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p . Betrachte das Polynom $f = (x^p - x) \in K[x]$. Dann ist $f \neq 0$ (hat $\neq 0$ Koeffiziente). Es gilt jedoch dass $\tilde{f} = 0$, i.e. ist die Nullabbildung.
E.g. $p = 3$, $f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x]$.

$f \neq 0$, weil $(f)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, 2, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \neq (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in $\mathbb{F}_3$. So ist $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$ die Nullabbildung. Mehr dazu im Übungsblatt.

Wenn aber K unendlich ist, haben wir solche Beispiele nicht! Wir werden dieses in Skript 3 genau untersuchen.

3 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir beweisen dass die Algebren $K[x]$ (Polynome) und $\widetilde{K[x]}$ (Polynomfunktionen) isomorph sind, wenn der Körper K unendlich ist. Wir werden für den Beweis Lagrange Interpolationsformel brauchen. Für den Beweis von LIF werden wir wiederum Dualbasen (LA I Skript 22) benötigen. In Abschnitt 3 setzen wir unsere Untersuchung von $K[x]$ fort. Diese Resultate werden in Kapitel II, und insbesondere in Kapitel III benötigt.

Sei $V := K[x]_{\leq n}$ der K-Vektorraum der Polynome mit deg $\leq n$ (zusammen mit 0 Polynom). Wir bemerken: $\dim V = n+1$, weil e.g. $\{x^0, \dots x^n\}$ eine Basis bildet.

Satz 3.0 (Lagrange Interpolation):
Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper, $t_0, t_1, \dots, t_n$ $n+1$ verschiedene Elemente aus K.
Für $0 \leq i \leq n$, sei $L_i := L_{t_i} \in V^*$ so definiert: $L_i(f) := f(t_i)$.
Dann ist $\{L_0, \dots, L_n\}$ eine Basis für V^*.

Beweis:
Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \dots, P_n\}$ von V zu finden. Solch eine Basis ist bestimmt durch die Gleichungen $L_j(P_i) = \delta_{ij} \quad 0 \leq i, j \leq n$ $(*)$
Wir wollen also $P_0, \dots, P_n$ konstruieren, die $(*)$ erfüllen.
Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

Prüfen Sie, dass diese tatsächlich $(*)$ erfüllen. (Siehe Übungsblatt). Darüberhinaus gilt für alle $f \in V : f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$. □.

Definition 3.1.
Seien $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K. Eine Bijektion $\sim: \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}; \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ist eine *Algebren-Isomorphie*, falls $\widetilde{(c\alpha + d\beta)} = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$ und $\widetilde{(\alpha\beta)} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}, c, d \in K$ gelten.

In Definition 2.6 haben wir für ein Polynom $f \in K[x]$ die Polynomfunkion $\tilde{f}$ definiert. Wir beweisen nun:

Satz 3.2.
Sei der Körper K unendlich. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : K[x] &\longrightarrow K[x]^{\sim} \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

eine K-Algebren-Isomorphie.

Beweis:
Es ist unmittelbar zu prüfen, dass $\widetilde{f + cg} = \tilde{f} + c\tilde{g}$ und $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$. Die Abbildung ist per Definition surjektiv. Ist sie Injektiv? D.h. $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?
Seien deg $f = n$ und $t_0, \dots, t_n$ verschiedene Elemente in K. Seien $P_0, \dots, P_n$ und schreibe $f = \sum f(t_i) P_i$ wie in LIF. Wenn $\tilde{f} = 0$, dann gilt insbesondere für alle $i = 0, \cdots, n$ dass $f(t_i) = 0$. D.h. alle Koeffiziente von f sind Null, und somit ist $f = 0$ das Nullpolynom. □

§ 3 Ideale

In Satz 2.1(i) haben wir schon bewiesen dass $K[x]$ ein Integritätsbereich ist, und erfüllt die Kürzungsregel
$f, g, h \in K[x] : f \neq 0$ und $fg = fh \Rightarrow g = h$ (Korollar 2.3). Wir beweisen nun den Divisionsalgorithmus in $K[x]$. Wir benötigen ein Hilfslemma:

Lemma 3.3.
Seien $f, d \neq 0$ mit $\deg d \leq \deg f$. Es gibt ein $g \in K[x]$, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg\,(f - dg) < \deg f$.

Beweis:
Schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$.

$$\begin{aligned} f &= a_m x^m &+ \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \qquad a_m \neq 0 \\ d &= b_n x^n &+ \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \qquad b_n \neq 0 \end{aligned}$$

Betrachte $\dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} \Big(b_n x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_i x^i\Big) = a_m x^m + \cdots$.
Also ist $f - \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \neq 0$ und $\deg \big(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d\big) < \deg f$.
Setze also $g := (\frac{a_m}{b_n}) x^{m-n}$. □

Satz 3.4. (Divisionsalgorithmus):
Seien $f, d \in K[x]$, $f, d \neq 0; \deg d \leq \deg f$. Dann gibt es $q, r \in K[x]$, so dass

(i) $f = dq + r$ wobei

(ii) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner sind q, r durch (i) und (ii) eindeutig definiert.

Beweis:
Existenz: Sei $f \neq 0$ und $\deg d \leq \deg f$. Lemma 3.3 ergibt, dass ein $g \in K[x]$ existiert, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg\,(f - dg) < \deg f$.
Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg\,(f - dg) \geq \deg d$, folgt wieder aus Lemma 3.3, dass ein $h \in K[x]$ existiert, so dass $(f - dg) - dh = 0$ oder $\deg\,(f - d(g + h)) < \deg\,(f - dg)$.
Die Fortsetzung ergibt ... $< \deg\,(f - d(g + h)) < \deg\,(f - dg) < \deg f$.
Die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit $f = dq + r$.

Eindeutigkeit: Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$ mit $r_1 = 0$ oder deg $r_1 <$ deg d.
$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow d(q - q_1) \neq 0$ und deg $(r_1 - r) =$ deg $d +$ deg $(q - q_1)$.
Aber deg $(r_1 - r) \leq \max$ (deg r_1, deg r) $<$ deg d - ein Widerspruch.
So $q - q_1 = 0$ und damit $r_1 - r = 0$.

Definition 3.5.
Seien $f, d \in K[x]; d \neq 0$. Wir sagen dass d *teilt* f oder f *ist durch* d *teilbar* oder f *ist ein Vielfaches von* d, wenn Divisionsalgorithmus $r = 0$ ergibt, d.h. : $f = dq + 0$. In dem Fall heißt q Quotient.

Diesen Begriff von Teilbarkeit in $K[x]$ werden wir in Skript 4 weiter untersuchen und ausnutzen.

4 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir Nullstellen von Polnomen und deren Vielfachheit studieren. Insbesondere werden wir in Abschnitt 4 Taylor's Formel lernen und beweisen. TF wird dann eingesetzt, um die Vielfachheit zu bestimmen. Diese Begriffe werden wir u.a. in Skripte 12 und 13 (Kapitel III; Normalformen) benötigen.

Korollar 4.1.
Seien $f \in K[x]; c \in K$. Es gilt: $(x - c)$ teilt f genau dann, wenn $f(c) = 0$.

Beweis: Divisionsalgorithmus liefert q, r so dass $f = (x-c)q+r; r = 0$ oder deg $r < 1$. Also ist r ein Skalarpolynom, und $f(c) = r(c) = r$. Insbesondere ist $r = 0$ genau dann, wenn $f(c) = 0$. □

Definition 4.2.
Seien $f \in K[x]; c \in K$, dann ist c eine *Nullstelle* von f , wenn $f(c) = 0$. Abbreviation: "NS von f in K". Das heisst, c ist Nullstelle von f genau dann, wenn $(x - c)$ teilt f.

Korollar 4.3.
Sei $f \in K[x]$ mit deg $f = n$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K.

Beweis: Wir beweisen per Induction nach n.

• Induktionsanfang: wir prüfen gleich für $n = 0$ (und $n = 1$.) Wenn $n = 0$ dann ist $f = c$ ein Skalarpolynom, und $c \neq 0$. Dann hat f gar keine Nullstelle in K. Wenn $n = 1$, dann $\exists a, c \in K, a \neq 0, s.d. f = ax + c$. Klar gilt $ax + c = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{-c}{a}$, und damit ist $\frac{-c}{a}$ die eindeutige Nullstelle.

• Induktionsannahme: Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $n - 1$ gilt.

• Induktionschritt: Sei a eine Nullstelle von f in K. Dann gibt es $q \in K[x]$ so dass $f = (x - a)q; \quad \deg q = n - 1$.
Sei $b \in K$. Nun ist $f(b) = 0$ genau dann, wenn $b = a$ oder b ist Nullstelle von q in K.
Induktionsannahme $\Rightarrow$ q hat höchstens $(n - 1)$ Nullstellen, also hat damit f höhstens n Nullstellen. □

§ 4 Formale Ableitungen

Notation 4.0:

Sei $f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$. Setze:
$f^{(0)} = f := D^0f$ (Konvention) und
$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1} := D^1f = Df$
$f^{(2)} = f'' = D^2f := D(D(f))$
$f^{(3)} = D^3(f)$,
usw.

Bemerkung 4.4.
Für $f, g \in K[x]$ und $c \in K$ gilt: $D(f + cg) = D(f) + cD(g)$. So ist $D : K[x] \longrightarrow K[x]$ ein linearer Operator. (Siehe auch ÜB 10; LA I). Allgemeiner gilt für $n \in \mathbb{N}_0$: D^n ist ein linearer Operator.

Satz 4.5. (Taylor's Formel)
Seien Char $(K) = 0; n \in \mathbb{N}_0, a \in K, p \in K[x]$ und deg $p \leq n$.
Es gilt: $p = \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a)\frac{1}{i!}(x-a)^i$ $(*)$

Beweis:
(Die Beweisidee ist wie für LIF). Sei V der K-Vektorraum der Polynome von deg $\leq n$ (und das 0 Polynom).
Für alle $i = 0, \ldots, n$, definiere $l_i : V \longrightarrow K$; $l_i \in V^*$, durch: $l_i(p) := p^{(i)}(a)$.
Setze $p_i := \frac{1}{i!}(x-a)^i$. Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe Übungsblatt).
Also sind $p_0, \ldots, p_n$ und $l_0, \ldots, l_n$ zueinander Dual-Basen von V und V^*.
Also $p = \sum_{i=0}^{n} l_i(p)p_i$. □

Bemerkung 4.6.
(1) $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$ sind linear unabhängig. Also ist diese lineare Kombination $(*)$ eindeutig.

(2) Char $(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 4.7.
Sei $f \neq 0$ und $c \in K$ eine Nullstelle von f in K. Die *Vielfachheit* von c ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $(x-c)^\mu$ teilt f,
Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$.

Satz 4.8.
Seien Char $(K) = 0, f \neq 0, \deg f \leq n$ und $c \in K$ ist eine Nullstelle von f.
Es gilt: c hat die Vielfachheit μ genau dann, wenn
$f^{(k)}(c) = 0$ bei $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $f^{(\mu)}(c) \neq 0$ $(\dagger)$

Beweis:

"$\Rightarrow$" $(x-c)^\mu$ teilt f und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht. Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x-c)^\mu g$.
Bemerke: $\deg g \leq n-\mu$ und $g(c) \neq 0$.

Die Taylor Formel liefert:
$f = (x-c)^\mu \big[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^m}{m!}\big]$. Also $f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$.

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k (0 \leq k \leq n)$ eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!} =$$

$$g^{(0)}(c)\frac{(x-c)^\mu}{0!} + \cdots + g^{(n-\mu)}(c)\frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!}. \qquad (\dagger\dagger)$$

Also $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0$ für $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$ für $\mu \leq k \leq n$.

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$.

"$\Leftarrow$" $(*)$ und $(\dagger\dagger)$ liefern $f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!}$.

$$\text{Also } f = (x-c)^\mu \underbrace{\Big[\frac{f^\mu(c)}{\mu!} + \frac{f^{\mu+1}(c)}{\mu+1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu}\Big]}_{:=g}$$

$$g(c) = \tfrac{f^\mu(c)}{\mu!} \neq 0.$$

Also $f = (x-c)^\mu g$ mit $g(c) \neq 0$.
Wir behaupten nun: $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht, sonst hätten wir $h \in K[x]$ mit $f = (x-c)^{\mu+1}h = (x-c)^\mu(x-c)h = (x-c)^\mu g$.
$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow g = (x-c)h$. Also $g(c) = 0$. Ein Widerspruch. $\square$

5 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript untersuchen wir weiter den Ring $K[x]$. Wir werden feststellen, das $K[x]$ viele Eigenschaften hat wie der Ring $\mathbb{Z}$. Diese Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ haben wir in der Vorlesung LA I Skripte 1-4 studiert und bewiesen; die Beweise hier sind sehr ähnlich. Wir zeigen u.a. das jedes Ideal in $K[x]$ ein Hauptideal ist. Dafür werden wir Satz 3.4 (DA) verwenden. In Abschnitt 6 beenden wir vorerst unsere Untersuchung von $K[x]$: Wir etablieren das auch in $K[x]$ die Primfaktorisierung gilt. Somit beenden wir Kapitel I.

Definition 5.1.
Seien $P_1, \cdots, p_\ell \in K[x]$. Ein Polynom $d \in K[x]$ ist der *größte gemeinsame Teiler von* $p_1, \ldots, p_\ell$, bezeichnet mit ggT $(p_1, \ldots, p_\ell)$, wenn:

1. $\forall 1 \leq i \leq \ell \;:\; d \mid p_i$, und
2. Wenn auch $d_0 \in K[x]$ 1. erfüllt, dann gilt auch $d_0 \mid d$.

Definition 5.2.
$p_1, \ldots, p_\ell$ sind *relativprim*, wenn ggT $(p_1, \ldots, p_e) = 1$ ist

Definition 5.3.
Ein K-Unterraum $M \subseteq K[x]$ ist ein *Ideal*, wenn gilt: Für alle $f \in K[x]$ und $g \in M$ ist $fg \in M$.

Beispiel 5.4.
Sei $d \in K[x]$. Setze $M := dK[x] = \{df \;;\; f \in K[x]\}$ ist ein Ideal:

- $df \in M \;;\; dg \in M \;;\; c \in K \to c(df) - dg = d(cf - g) \in M$, also ist M ein Unterraum.
- $f \in K[x]$ und $dg \in M \Rightarrow f(dg) = d(fg) \in M$.

Definition 5.5.
$< d >:= dK[x]$ heißt *Hauptideal* mit Erzeuger d.

Beispiel 5.6.
$K[x] =< 1 >$ und $\{0\} =< 0 >$ sind Hauptideale.

Beispiel 5.7.
Seien $d_1, \ldots, d_\ell \in K[x]$. $M := d_1K[x] + \cdots + d_\ell K[x]$ ist ein K-Unterraum. Es ist ein Ideal:
Sei $p \in M, p = d_1 f_1 + \cdots + f_\ell f_\ell$ mit $f_1, \ldots, f_\ell \in K[x]$ und sei $f \in K[x]$,
dann ist $pf = d_1 \underbrace{(f_{1f})}_{\in K[x]} + \cdots + d_\ell \underbrace{(f_{\ell f})}_{\in K[x]} \in M$.

Definition 5.8.
Das Ideal $d_1K[x] + \cdots + d_\ell K[x]$, bezeichnet mit $< d_1, \cdots, d_\ell >$, ist ein *endlich erzeugtes Ideal*, mit Erzeugern $d_1, \ldots, d_\ell$.

Weitere Beispiele: siehe Übungsblatt.

Satz 5.9.
Sei $0 \neq M \subseteq K[x]$ ein Ideal. Es existiert genau ein normiertes Polynom $d \in K[x]$, so dass $M =< d >$.

Beweis:
Existenz: Sei $d \neq 0$ und $d \in M$, wähle d so dass deg d ist minimal und ohne Einschränkung d ist normiert.

Sei $f \in M$. (Divisionsalgorithmus) $\Rightarrow f = dq + r$, mit $r = 0$ oder deg $r <$ deg d.

Aber $\underbrace{r = f - dq}_{\in M}$. Also muss $r = 0$ und damit $f = dq$ sein.

Eindeutigkeit: Sei g normiert, so dass $M = gK[x]$ ist. Also existieren $0 \neq p, q \in K[x]$, so dass $d = gp$ und $g = dq$, also $d = dqp$ ist. Es folgt deg d = deg d + deg p + deg q. Also deg p = deg $q = 0$; p, q sind Skalarpolynome. Nun sind g und d normiert, also $p = q = 1$, also $d = g$. $\square$

Korollar 5.10.
Der normierte Erzeuger d vom Ideal $< p_1, \cdots, p_\ell >$ ist der ggT $(p_1, \ldots, p_\ell)$. Insbesondere, wenn $p_1, \ldots, p_\ell$ relativprim sind, dann ist $< p_1, \cdots, p_\ell >= K[x]$.

Beweis:

1. $< d >= dK[x] =< p_1, \cdots, p_\ell >$, also $p_i \in < d >$ für alle $1 \leq i \leq \ell$, also $d \mid p_i$ für alle $1 \leq i \leq \ell$.
2. Sei $d_0 \in K[x]$ so dass $d_0 \mid p_i$ für alle $1 \leq i \leq \ell$. Es gibt also $g_i \in K[x]$ so dass $p_i = d_0 g_i$ für alle $1 \leq i \leq \ell$. Nun $d \in < p_1, \cdots, p_\ell >$, also $d = p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n = d_0[g_1 q_1 + \cdots + g_n q_n]$.

$\square$

§ 5 Primzerlegung (Primfaktorisierung)

Definition 5.11.
$f \in K[x]$ ist *reduzibel* über K, wenn es $g, h \in K[x]$ gibt mit $\deg g \geq 1, \deg h \geq 1$ und $f = gh$. Sonst ist f *irreduzibel*. Ist f irreduzibel und $\deg f \geq 1$, so nennen wir f *Primpolynome*.
Bemerkung: f reduzibel $\Rightarrow \deg f \geq 2$.

Beispiel 5.12.
$f = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ ist reduzibel über $\mathbb{C}$, aber irreduzibel über $\mathbb{R}$, weil es keine reelle Nullstellen hat.

Weitere Beispiele: siehe Übungsblatt.

Satz 5.13.
Seien $p, f, g \in K[x]$, p ist ein Primpolynom. Aus $p \mid fg$ folgt $p \mid f$ oder $p \mid g$.

Beweis:
Setze $d :=$ggT(f, p). OE ist p normiert, und p irreduzibel $\Rightarrow$ die einzigen normierten Teiler von p sind 1 und p. Also ist $d = 1$ oder $d = p$. Aus Korollar 5.10 folgt ausserdem dass: $\exists p_0, f_0 \in K[x]$ so dass $d = p_0 p + f_0 f$

• Wenn $d = p$, dann $p \mid f$.

• Wenn $d = 1$, dann ist $1 = f_0 f + p_0 p$, also $g = f_0(fg) + p(p_0 g)$. Nun $p \mid fg$, $p \mid p(p_0 g) \Rightarrow p \mid g$. $\square$

Korollar 5.14.
p ist ein Primpolynom. $p \mid f_1 \cdots f_\ell \Rightarrow$ es existiert ein $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, so dass $p \mid f_i$.

Satz 5.15.
Sei $f \in K[x]$, f normiert und $\deg f \geq 1$. Dann ist f ein Produkt von normierten Primpolynomen. Diese Darstellung ist eindeutig, bis auf Umnummerierung.

Beweis:
Existenz:

• $\deg f = 1 \Rightarrow f$ irreduzibel. Es ist nichts weiter zu zeigen.

• Sei nun $n := \deg f > 1$ - Beweis per Induktion nach n. Ist f irreduzibel, dann ist nichts weiter zu zeigen. Sonst $f = gh$ mit $n > \deg g \geq 1$ und $n > \deg h \geq 1$. Die Induktionsannahme gilt für g, h und damit bekommen wir eine Faktorisierung für f.

Eindeutigkeit:

• Sei $f = p_1 \cdots p_\ell = q_1 \cdots q_s$. Nun sind für alle i die p_i, q_i normierte Primpolynome. Also $p_\ell \mid q_1 \cdots q_s$. Es folgt $p_\ell \mid q_j$ für eine gewisse $1 \leq j \leq s$. Da p_ℓ, q_j beide normierte Primpolynome sind folgt $q_j = p_\ell$.

• OE nach Umnummerierung bekommen wir $p_\ell = q_s$ $(*)$
Und somit $P := p_1 \cdots p_{\ell-1} = q_1 \cdots q_{s-1}$.

• Die Induktionsannahme gilt für P da $\deg(P) < n$. Das heißt $q_1, \ldots, q_{s-1}$ ist eine Umnummerierung von $p_1, \ldots, p_{\ell-1}$.

Diese letzte Aussage zusammen mit $(*)$ beweist unsere Behauptung. $\square$

6 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL II: MULTILINEARFORMEN UND DETERMINANTEN.

In diesem Skript führen wir die symmetrische Gruppe S_n ein, die wir für die Definition der Determinante später brauchen. Unser erstes Ziel ist es Satz 6.8 zu beweisen. Wir werden die Untersuchung von S_n in Skript 7 fortsetzen.

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n

Notation 6.0: Für $n \in \mathbb{N}$, setze $\mathbb{N}_n := \{1, \cdots, n\}$.

Definition 6.1.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine *Permutation* auf $\mathbb{N}_n$ ist eine Bijektion $\alpha : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. Wir schreiben S_n für die Menge der Permutations auf $\mathbb{N}_n$. Diese Menge S_n versehen mit der Verknüpfung $S_n \times S_n \to S_n$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$ ist eine Gruppe; die *symmetrische Gruppe auf n Elemente.*
Notation: Wir schreiben $\alpha\beta := \alpha \circ \beta$. Für $\alpha \in S_n$ schreiben wir:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

• Warum ist S_n eine Gruppe?

1. Wenn $\alpha, \beta \in S_n$ dann ist $\alpha \circ \beta$ bijektiv, also $\alpha \circ \beta \in S_n$.
2. Die Identitätsabbildung $\epsilon : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, definiert durch $\epsilon(i) := i$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$, ist das neutrale Element von S_n.
3. Bijektive Abbildungen sind invertierbar: wenn $\alpha \in S_n$, dann gibt es $\beta \in S_n$ so dass $\alpha \circ \beta = \epsilon$.
4. Multiplikation ist assoziativ weil die Komposition von Abbildungen immer assoziativ ist.

□

Beispiel 6.2.
Die Permutation $\alpha \in S_5$ mit $\alpha(1) = 3$; $\alpha(2) = 5$; $\alpha(3) = 4$; $\alpha(4) = 1$; $\alpha(5) = 2$ wird so geschrieben:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition 6.3.

1. Wenn es $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{N}_n$ gibt so dass:
   - $\alpha(a_i) = a_{i+1}\,;\ \forall 1 \leq i \leq m-1\,;$ und
   - $\alpha(a_m) = a_1$ und
   - $\alpha(x) = x\,;\ \forall x \notin \{a_1, \cdots, a_m\}$,

     dann heißt α ein *m-Zyklus*.

   Notation dafür: $(a_1 a_2 \cdots a_m)$.

   Konvention: Die Identitätsabbildung wird bezeichnet $\epsilon := (1)$.

2. Ein 2-Zyklus heißt eine *Transposition*.

Beispiel 6.4. Die Permutation

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ist der 3-Zyklus (142).

Definition 6.5.
Die Permutationen $\alpha, \beta \in S_n$ sind *disjunkt* wenn

$$\{x\,;\ \alpha(x) \neq x\} \cap \{x\,;\ \beta(x) \neq x\} = \emptyset.$$

Beispiel 6.6. Betrachte folgende Transpositionen:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (12)$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (34)$$

und

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (23)$$

Die Permutationen σ und τ sind disjunkt, σ und γ sind nicht disjunkt, τ und γ sind nicht disjunkt.

Lemma 6.7. Seien $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in S_n$ paarweise disjunkte Permutationen und sei $\tau \in S_n$. Die Permutationen $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ und τ sind disjunkt genau dann, wenn für alle $1 \leq i \leq m$ sind α_i und τ disjunkt.

Beweis: Siehe ÜB. □

Satz 6.8.
Jede Permutation $\sigma \in S_n$ hat eine Darstellung als Produkt $\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_m$, wobei $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in S_n$ paarweise disjunkte Zyklen sind.

Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach:

$$\Gamma(\sigma) := |\{a \in \mathbb{N}_n \,;\, \sigma(a) \neq a\}|$$

• Induktionsanfang:
wenn $\Gamma(\sigma) = 0$ dann ist $\sigma = \epsilon = (1)$.

• Induktionsannahme:
die Aussage gelte für alle $\tau \in S_n$ wofür $\Gamma(\tau) < k$.

• Induktionsschritt:
Setze $k := \Gamma(\sigma) > 0$. Sei $i_0 \in \mathbb{N}_n$ so dass $\sigma(i_0) \neq i_0$.
Für $s \in \mathbb{N}$ setze $i_s := \sigma^s(i_0)$. Da $\{i_s \,;\, s \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_n$, ist diese Menge endlich.
Folglich gibt es $p < q \in \mathbb{N}$ so dass $i_p = i_q$. Insbesondere ist $\sigma^{q-p}(i_0) = i_0$.
Also ist die Menge $\{l \in \mathbb{N} \,;\, \sigma^l(i_0) = i_0\}$ nicht die Leeremenge.
Sei $\rho \geq 2$ die kleinste natürliche Zahl wofür $\sigma^\rho(i_0) = i_0$ und setze $r := \rho - 1$.
Die Minimalität von ρ impliziert dass $|\{i_0, \cdots, i_r\}| = \rho$
(wenn $i_j = i_l$ für $0 \leq j < l \leq r$ dann wäre $\sigma^{l-j}(i_0) = i_0$, und $l - j < \rho$, Widerspruch).
Analog beweist man: für $a \in \{i_0, \cdots, i_r\}$ gilt $\sigma(a) \neq a$. **(*)**
Betrache den Zyklus $\tau := (i_0 \cdots i_r)$.
Per Definition gilt für alle $0 \leq l \leq r$ dass $\tau(i_l) = \sigma(i_l)$. **(†)**
Bemerke auch dass $\tau(a) = a$ genau dann, wenn $a \notin \{i_0, \cdots, i_r\}$. **(**)**
Aus **(*)** folgt außerdem dass $\sigma(a) = a$ impliziert $a \notin \{i_0, \cdots, i_r\}$. **(***)**
Aus (†), **(**)** und **(***)** folgt unmittelbar:

$$\{a \in \mathbb{N}_n \,;\, \tau^{-1}\sigma(a) = a\} = \{a \in \mathbb{N}_n \,;\, \sigma(a) = a\} \cup \{i_0, \cdots, i_r\} \;(\dagger\dagger)$$

.
Also ist $\Gamma(\tau^{-1}\sigma) < \Gamma(\sigma)$ und die Induktionsannahme gilt dafür. Schreibe

$$\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_m$$

oder

$$\sigma = \tau\alpha_1 \cdots \alpha_m$$

wobei $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ paarweise disjunkte Zyklen sind.
Aus (††) und **(**)** folgt:
$\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_m$ und τ sind disjunkt. Schließlich folgt aus Lemma 6.7 dass auch $\tau, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ paarweise disjunkte Zyklen sind. $\square$

7 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir die Parität einer Permutation einführen, und beweisen, dass der Begriff wohldefiniert ist. Wir werden dann eine wichtige Untergruppe von S_n kennenlernen, und damit Abschnitt 6 beenden. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwending.

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n (Fortsetzung)

Beispiel: Die Darstellung als Produkt von paarweise disjunkte Zyklen der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (134)\,(25)$$

Satz 7.1. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von Transpositionen.

Beweis:
Das neutrale Element (1) ist $(12)\,(21)$.
Wegen Satz 6.8 genügt es zu zeigen, dass ein Zyklus ein Produkt von Transpositionen (2- Zyklus) ist. Sei $(i_1 \dots i_r) \in S_n$ ein r-Zyklus mit $r > 2$. Wir behaupten dass

$$(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)\,(i_1 i_2)\ .$$

Für i_r gilt:

$$(i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)\,(i_1 i_2)\, i_r = (i_1 i_r)\, i_r = i_1\ .$$

Für i_s mit $1 \leq s < r$ gilt:

$$\begin{aligned}(i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)\,(i_1 i_2)\, i_s &= (i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+1})\,(i_1 i_s)\, i_s \\ &= (i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2})\,(i_1 i_{s+1})\, i_1 \\ &= (i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2})\, i_{s+1} = i_{s+1}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 7.2. Die Permutation $(123) \in S_4$ hat zwei Darstellungen:

$$(123) = (13)\,(12) = (13)\,(42)\,(12)\,(14)$$

Die Darstellung ist also i.A. nicht eindeutig, sogar ist die Anzahl der Permutationen in einer Darstellung nicht eindeutig. Was ist denn eindeutig? Die **Parität** ist eindeutig, wie wir jetzt erklären.

Erinnerung: $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$.

Definition 7.3. Seien $\sigma \in S_n$ und $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Wir definieren σf als Abbildung $\sigma f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ wie folgend:

$$(\sigma f)\,(x_1, \dots, x_n) := f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right)$$

Beispiel 7.4. Sei $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x_1, x_2, x_3) := x_1x_2 + x_3$ and $\sigma := (123) \in S_3$. Die Abbildung $(\sigma f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2x_3 + x_1$.

Lemma 7.5. Sei $\sigma, \tau \in S_n$ und $f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$. Dann

(i) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f$

(ii) $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$

Beweis: Siehe ÜB.

Satz 7.6. Es existiert eine wohldefinierte Abbildung sign: $S_n \to \{1, -1\}$ so dass:

(a) Für jede Transposition $\tau \in S_n$, $\text{sign}(\tau) = -1$.

(b) Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)$$

Diese Abbildung ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

Beweis: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Behauptung: Für eine Transposition $\tau \in S_n$ gilt $\tau\Delta = -\Delta$. In der Tat, sei $\tau = (rs)$ mit $r < s$. Aus Lemma 7.5(ii) folgt

$$\tau\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} \tau(x_j - x_i)$$

Offensichtlich, wenn $i, j \notin \{r, s\}$ dann $\tau(x_j - x_i) = (x_j - x_i)$.
Für den Faktor $(x_s - x_r)$ gilt $\tau(x_s - x_r) = (x_r - x_s) = -(x_s - x_r)$.
Die andere Faktoren können wir paaren wie folgt:

$$\begin{aligned} &(x_k - x_s)(x_k - x_r), \text{ wenn } k > s;\\ &(x_s - x_k)(x_k - x_r), \text{ wenn } r < k < s;\\ &(x_s - x_k)(x_r - x_k), \text{ wenn } k < r. \end{aligned}$$

Jedes Produkt ist von τ unberührt.
Also $\tau\Delta = -\Delta$. Wir haben die Behauptung bewiesen. □Beh.

Sei nun $\sigma \in S_n$. Wegen Satz 7.1 schreiben wir $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_m$ wobei $\tau_1, \ldots, \tau_m$ Transpositions sind. Aus Lemma 7.5(i) folgt:

$$\sigma\Delta = \tau_1(\tau_2(\ldots(\tau_m\Delta)\ldots))$$

und die Behauptung impliziert dass

$$\tau_1(\tau_2(\ldots(\tau_m\Delta)\ldots)) = (-1)^m\,\Delta.$$

Also **entweder** $\sigma\Delta = (-1)^m\Delta = \Delta$ wenn m gerade, **oder** $\sigma\Delta = (-1)^m\Delta = -\Delta$, wenn m ungerade. Wir merken dass beide Fälle nicht gleichzeitig auftreten können, da $\Delta \neq 0$ ist.

Für $\sigma \in S_n$, setze entweder $\text{sign}(\sigma) = 1$ wenn $\sigma\Delta = \Delta$ oder $\text{sign}(\sigma) = -1$ wenn $\sigma\Delta = -\Delta$.

Seien σ, $\tau \in S_n$. Aus Lemma7.5 (ii) folgt: $(\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta)$, also $\text{sign}(\sigma\tau)$=$\text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)$. □

Definition 7.7. Für $\sigma \in S_n$, nennen wir $\text{sign}(\sigma)$ die *Signatur* von σ. Wir nennen σ *gerade* wenn $\text{sign}(\sigma) = 1$ und *ungerade* wenn $\text{sign}(\sigma) = -1$.

Bemerkung 7.8. Die Permutation

- σ ist gerade genau dann, wenn σ ist Produkt von m Transpositionen mit m gerade, und
- σ ist ungerade wenn σ ist Produkt von m Transpositionen mit m ungerade.

Betrachte nun die folgende Untermenge von S_n:

$$A_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist gerade }\}$$

Korollar 7.9. A_n eine Untergruppe von S_n und $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.

Beweis:
Das neutrale Element (1) ist gerade, also $(1) \in A_n$.
Wenn $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ und $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ (wobei τ_i, γ_j Transpositionen und k, n gerade sind), dann ist $\sigma\gamma = \tau_1 \cdots \tau_m\ \gamma_1 \cdots \gamma_k$. Also ist A_n abgeschlossen unter Produkt.
Da $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$, ist A_n auch unter Inversen abgeschlossen. Siehe ÜB.

Betrachte nun $U := \{\delta \in S_n \mid \delta \text{ ist ungerade}\}$. Offensichtlich ist $S_n = A_n \mathbin{\dot\cup} U$.
Außerdem ist $A_n \longrightarrow U$; $\sigma \longmapsto (12)\sigma$ eine bijektive Abbildung.
Da $|S_n| = n!$ (siehe ÜB), folgt unsere letzte Behauptung. $\square$

Definition 7.10. Wir nennen A_n ist die *alternierende Gruppe*.

8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im Abschnitt 7 werden wir den Begriff "m-lineare Formen" einführen (eine natürliche Verallgemeinerung vom Begriff "lineare Funktionale") und in Abschnitt 8 werden wir besondere m-lineare Formen studieren. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwending.

§ 7 Multilineare Formen

Definition 8.1.
Sei K ein Körper und seien U, V K-Vektorräume.

$$\beta : U \times V \longrightarrow K$$

$$(x, y) \longmapsto \beta(x, y)$$

ist eine *bilineare Funktionale* (oder bilineare Form), falls gelten:

(1) $\beta(c_1x_1 + c_2x_2, y) = c_1\beta(x_1, y) + c_2\beta(x_2, y)$ und

(2) $\beta(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\beta(x, y_1) + d_2\beta(x1, y_2)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U$ und $y, y_1, y_2 \in V$ und $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Beispiel 8.2.
$V \times V^* \longrightarrow K$
$(x, f) \longmapsto [x, f]$, wobei $[x, f] := f(x)$.
Die definierenden Eigenschaften und Verknüpfungen in V^* liefern

(1) $[c_1x_1 + c_2x_2, f] = c_1[x_1, f] + c_2[x_2, f]$ und

(2) $[x, d_1f_1 + d_2f_2] = d_1[x, f_1] + d_2[x, f_2]$.

Notation:
$L^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$. Sie ist ein Vektorraum (mit den Verknüpfungen $(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)(x, y) := c_1\beta_1(x, y) + c_2\beta_2(x, y)$ wie üblich).

Definition 8.3.
Seien $m \in \mathbb{N}$ und $V_1, \ldots, V_m$ K-Vektorräume. Eine *m-lineare Funktionale* (Form) (oder multilineare Funktionale vom Grad m) auf $V_1 \times \cdots \times V_m$ ist eine Abbildung $\mu : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow K$, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \mu(\alpha_1, \ldots, & c\alpha_i + \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & = \\ c\mu(\alpha_1, \ldots, & \alpha_i & , \ldots, \alpha_m) & + \\ \mu(\alpha_1, \ldots, & \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & \end{array}\right\} \text{ für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i; c \in K.$$

Notation:
$L^{(m)}(V_1 \times \cdots \times V_m; K) := K$-Vektorraum der m-linearen Formen.

Bemerkung 8.4.
μ ist multilinear und falls ein i mit $\alpha_i = 0$ existiert, dann gilt $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) = 0$.

§ 8 Alternierende multilineare Formen auf K^n

Definition 8.5.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n\text{-mal}} \longrightarrow K$$

ist *alternierend*, falls $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $z_i = z_j$ und $i \neq j$ existieren, dann gilt $\delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$ (für $z_1, \ldots, z_n \in K^n$).

Konvention:
δ wird auch als Abbildung auf $K^{n\times n} = Mat_{n\times n}(K)$ aufgefasst, nämlich

$$\delta(A) = \delta(z_1, \ldots, z_n), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ .... \\ --- \\ z_n \end{pmatrix};$$

i.e. z_i ist die $i$te-Zeile der $n \times n$-Matrix A.

Lemma 8.6.
Sei δ alternierend. Es gilt:

(i) $z_1, \ldots, z_n$ sind linear abhängig $\Rightarrow \delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$

(ii) $\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) = -\delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$ (für $i \neq j$).

Beweis (allgemein)
$\delta(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) = Sign(\pi)\delta(z_1, \ldots, z_n)$ für $\pi \in S_n$

(i) Ohne Einschränkung nehmen wir an $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$ für geeignete $c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$.

Wir berechnen:
$\delta(z_1, \ldots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_i) = 0.$

(ii) Wir berechnen:
$0 = \delta(z_1, \ldots, z_i + z_j, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) =$
$\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) +$
$\delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) =$
$\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) +$
$\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n) +$
$\delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_j, \ldots, z_n) +$
$\delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n).$
Also:
$0 = \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) + \delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$
wie behauptet. □

Bemerkung 8.7.

(1) Falls Char $(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung: δ erfüllt (ii) impliziert δ alternierend ist: Man nehme $z_i = z_j$ für $i \neq j$.
Also $\delta(z_1, \dots z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n)$. Als Char $(K) \neq 2$ gilt für alle $a \in K$: $a = -a \Rightarrow a = 0$.

(2) $\delta((a,b),(c,d)) := ac + bd$ auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ ist ein Gegenbeispiel.

9 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im Skript 8 haben wir eine n-lineare Form δ als Abbildung mit Definitionsbereich $M_{n\times n}(K)$ aufgefasst. In diesem Skript werden wir diese Abbildungen genauer analysieren, und ihre Eigenschaften studieren. Insbesondere, werden wir die Determinante als solche betrachten.

Hier, sei $\delta : K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ eine alternierende lineare Form und $A \in M_{n\times n}(K)$.

Lemma 9.1.
Sei e eine elementare Zeilenumformung. Es gelten:

(i) $\delta(e(A)) = \delta(A)$; e von Typ 3;

(ii) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$; e von Typ 1;

(iii) $\delta(e(A) = c\delta(A))$; e von Typ 2.

(iv) Allgemeiner gilt: $\forall c \in K : \delta(cA) = c^n\delta(a)$.

Beweis:

(i) $\delta(z_1 + cz_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n) + c\delta(z_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

(ii) Folgt aus Lemma 7.8.

(iii) Folgt aus n-Linearität.

(iv) $\delta(cz_1, \ldots, cz_n) = c\delta(z_1, cz_2, \ldots, cz_n) = c^2\delta(z_1, z_2, cz_3, \ldots, cz_n) = \cdots = c^n\delta(z_1, z_2, z_2, \ldots, z_n)$. □

Lemma 9.2.
Für jede $A \in M_{n\times n}(K)$ gibt es ein Skalar $\Delta_A \neq 0$; $\Delta_A \in K$, und Δ_A **hängt nur von A ab**, so dass: $\delta(A) = \Delta_A\delta(\text{r.z.S.F.}(A))$.

Beweis:
Ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Lemma 9.1. Wir sehen dass Δ_A ist ein Produkt aus der Gestalt $(-1)^\ell c_1 \cdots c_k$ für geeignete $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, \ldots, c_k \in K^\times$. □

Bemerkung 9.3.
Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt die folgende Dichotomie.
Fall 1: r.z.S.F.(A) hat eine Nullzeile oder **Fall 2:** r.z.S.F.$(A) = I_n$
(siehe Skript 7 Lineare Algebra I; Bemerkung 7.3).

Also erhalten wir hier auch eine Dichotomie:
Fall 1: $\delta(A) = \Delta_A 0 = 0$ oder **Fall 2:** $\delta(A) = \Delta_A\delta(I_n)$.

Korollar 9.4.
$\delta \neq 0$ genau dann, wenn $\delta(I_n) \neq 0$.

Beweis

"$\Leftarrow$" : Klar.

"$\Rightarrow$" : $\delta(I_n) = 0 \Rightarrow \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2). $\square$

Korollar 9.5.
Seien $\delta \neq 0, A \in M_{n\times n}(K)$. Es gilt: $\delta(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar .

Beweis:
Folgt unmittelbar aus Lemma 9.2 und Korollar 9.4 weil: A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ r.z.S.F.$(A) = I_n$ (siehe Skript 9 Lineare Algebra I; Satz 9.8). $\square$.

Definition 9.6. und Notation
$\mathbb{A} := alt^{(n)}(K^n) :=$ die Menge der n-linearen alternierenden Formen auf K^n.

Bemerkung 9.7. $\mathbb{A}$ ist ein K-Vektorraum, er ist ein Unterraum von $L^{(n)}(K^n \times \cdots \times K^n; K)$.

Korollar 9.8.
Seien δ_1, δ_2 n-lineare alternierende Formen auf K^n. Es gilt $\delta_1 = \delta_2$ genau dann, wenn $\delta_1(e_1, \ldots, e_n) = \delta_2(e_1, \ldots, e_n)$.

Beweis:
Wir erinnern daran, dass $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standard-Basis bezeichnet. Wir haben also $\delta_1 - \delta_2 \in \mathbb{A}$, und $(\delta_1 - \delta_2)(I_n) = 0$. Aus Korollar 9.4 folgt $\delta_1 - \delta_2 = 0$. $\square$.

Korollar 9.9.
$\dim(alt^{(n)}(K^n)) \leq 1$.

Beweis:
Sei $\delta_1 \neq 0$, $\delta_1 \in \mathbb{A}$ fest. Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ wie im Fall 2 von Bemerkung 9.3.

$$\text{Es gilt } \delta_2(A) = \Delta_A\ \delta_2(I_n) = \Delta_A \frac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)}\delta_1(I_n) \qquad (*)$$

Setze $d := \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$.
Aus $(*)$ folgt nun: $\delta_2(A) = d\Delta_A\delta_1(I_n) = d\delta_1(A)$ für alle $A \in M_{n\times n}(K)$.
Also ist $\delta_2 = d\delta_1$. $\square$

Wir werden nun zeigen, dass ein $\delta \in \mathbb{A}$ existiert mit $\delta(I_n) = 1$. Solch eine Funktionale δ ist wegen Korollar 9.8 notwendig eindeutig! Hierzu brauchen wir folgende:

Formelberechnung

Seien $\delta \in \mathbb{A}$ und $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$; $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Wir schreiben $z_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$ in der Standardbasis.

Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_i=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right) \overset{n-lin.}{=} \qquad (*)$$

$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}). \qquad (**)$$

Betrachte nun die Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} \{1,\dots,n\} & \longrightarrow & \{1,\dots,n\} \\ i & \longmapsto & j_i \end{array}.$$

• Wenn diese Abbildung **nicht** injektiv ist, dann gibt es eine Wiederholung in $(j_1, \dots, j_n)$ und damit ist $\delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$.

• Wenn diese Abbildung injektiv ist, dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$ und damit ist $\delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = \delta(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}) = sign(\pi)\delta(e_1, \dots, e_n)$.

Also können wir nun $(**)$ umschreiben.

$$\begin{aligned} (**) &= \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \delta(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \delta(I_n) \\ &= \delta(I_n) \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \qquad (***) \end{aligned}.$$

Wir sehen also, dass $\delta(I_n) = 1$ eine Formel für δ liefert wie in $(***)$:

Satz 9.10.
Definiere für $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$:

$$\delta(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \qquad \text{(det)}$$

Dann ist δ ist eine n-lineare alternierende Form und erfüllt $\delta(I_n) = 1$.

Beweis:

- n-linear? Berechne
  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} + da'_{1\pi(1)}) a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}\right] =$

  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}) + d(a'_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)})\right]$

  usw..... Übungsaufgabe.

- alternierend?
  Sei $z_1 = z_2$, i.e. $a_{1j} = a_{2j}$ für alle $1 \leq j \leq n$, i.e. $a_{1\pi(j)} = a_{2\pi(j)}$ für alle $\pi \in S_n$ und $1 \leq j \leq n$.

Berechne (mit $S_n = A_n \cup A_n(12)$)

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \sum_{\pi \in A_n \cup A_n(12)} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{(I)} \right) + \\ &\quad \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} [sign(\pi)(12)]\ a_{1\pi(12)(1)}\ a_{1\pi(12)(2)}\ a_{3\pi(12)(3)} \cdots a_{n\pi(12)(n)}}_{(II)} \right)\end{aligned}$$

In der Summe (II) bekommen wir:

$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(2)}\ a_{1\pi(1)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} =$$
$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Wir sehen also, die Termen kürzen sich ab, i.e. in (I) bzw. (II): $a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$, i.e. $(I) + (II) = 0$.

• Sei $0 \neq A$ diagonal; also $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Das heißt, dass die einzige Permutation, die einen Beitrag $\neq 0$ bringt, diejenige ist, für die $i = \pi(i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, i.e. $\pi = (1)$ die Identität $\in S_n$. Es bleibt also nur ein Produkt in (det) übrig, nämlich $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \delta(A)$, insbesondere $\delta(I_n) = 1$. □

Korollar 9.11.
$\dim alt^{(n)}(K^n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 9.12.
Die *Determinante* (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare alternierende Form det auf K^n, wofür $\det(I_n) = 1$ gilt.

10 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir einige Eigenschaften der Determinante, die wir im LA I Skript 28 gelernt und bewiesen hatten, hier anderweitig beweisen.

Korollar 10.1.
Für alle $\delta \in alt^{(n)}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt $\delta(A) = \det(A)\delta(I_n)$.

Beweis:
Da $\det \in alt^{(n)}$ und $\det \neq 0$, ist $\dim(alt^{(n)}) = 1$ (siehe Korollar 9.11).
Sei $\delta \in alt^{(n)}$. Also ist $\delta = d\det$ für $d \in K$. Nun muss gelten $\delta(I_n) = d\det(I_n)$, also $d = \delta(I_n)$. □

Bemerkung 10.2.
Sei R ein kommutativer Ring mit 1. $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert. Der Hauptsatz gilt auch in diesem erweiterten Rahmen:
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$; $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$. Definiere:

$$\det(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}.$$

Dann ist det die eindeutige Funktionale $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(I_n) = 1$.

Beispiel 10.3.
Setze $R := K[x]$, und $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$

Sei $\delta \in alt^{(3)}(M_{3\times 3}(R))$ so definiert: $\delta(A) = \delta(x\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$,
wobei $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0)$ und $\varepsilon_3 = (0,0,1)$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \delta(A) &= x\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) \\ &= x\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1) + x^4\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1) - x^5\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \\ &= (x^4 + x^2)\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3). \end{aligned}$$

Erinnerung:
$(A^T)_{ji} = A_{ij}$ oder $a^T_{ji} = a_{ij}$.

Satz 10.4.
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Es gilt: $\det(A) = \det(A^T)$.

Beweis:
Betrachte
$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \prod_{i,j=1,j=\pi(i)}^{n} a_{ij} = \prod_{i,j=1,i=\pi^{-1}(j)}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a^{T}_{j\pi^{-1}(j)}$$
für $\pi \in S_n$.

Wir berechnen nun
$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1}\in S_n} sign(\pi^{-1})\prod_{j=1}^{n} a^{T}_{j\pi^{-1}(j)} = \det(A^T)$. □

Satz 10.5.
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$, für $A, B \in M_{n\times n}(R)$.

Beweis:

Fixiere $B \in M_{n\times n}(R)$, und setze $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ .... \\ --- \\ z_n \end{pmatrix}$.

Definiere $\delta_B(A) := \det(AB)$; also $\delta_B(z_1, \ldots, z_n) = \det(z_1B, \ldots, z_nB)$.
Dann ist δ_B n-linear und alternierend:

n-linear?
$\delta_B(z_1 + cz_1', z_2, \ldots, z_n) = \det((z_1 + cz_1')B, \ldots, z_nB) =$
$\det(z_1B, z_2B, \ldots, z_nB) + c\det(z_1'B, z_2B, \ldots, z_nB)$ (weitere Details als ÜA).

alternierend?
$\delta_B(z_1, z_1, \ldots, z_n) = \det(z_1B, z_1B, \ldots, z_nB) = 0$ (weitere Details als ÜA).

Also $\delta_B \in alt^{(n)}$ und Korollar 10.1 $\Rightarrow \delta_B(A) = \det(A)\delta_B(I_n) = \det(A)\det(B)$. □

Korollar 10.6.
Sei A invertierbar. Es gilt $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

Beweis:
$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. □

Notation (Erinnerung):
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir bezeichnen mit $A[i \mid j]$ ist die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man nach Entfernung der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A bekommt, und setzen $D_{ij}(A) := \det(A[i \mid j])$.

Satz 10.7.
Fixiere j mit $1 \le j \le n$. Setze
$$\delta(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$
Dann ist $\delta \in alt^{(n)}$ und $\delta(I_n) = 1$.

Beweis:
n-linear? Für i, j ist $a_{ij}D_{ij}(A)$ n-linear (ÜA). Da Eine lineare Kombination von n-linearen wieder n-linear ist, folgt δ n-linear.

alternierend?

Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ und seien $z_k = z_\ell$ für $k < \ell$.

Für $i \neq k$ und $i \neq \ell$, hat $A[i \mid j]$ zwei gleiche Zeilen, also ist $D_{ij}(A) = 0$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \delta(A) &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} D_{\ell j}(A) \\ &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{kj} D_{\ell j}(A) \end{aligned} \qquad (*)$$

weil $a_{\ell j} = a_{kj}$ ist.

Betrachte:

$$A[k \mid j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_{k-1}^- \\ z_{k+1}^- \\ \vdots \\ z_\ell^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix} \text{ und } A[\ell \mid j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_k^- \\ \vdots \\ z_{\ell-1}^- \\ z_{\ell+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix}$$

(I) (II)

- Die $(\ell-1)$-te Zeile von (I) ist $z_\ell^- = z_k^-$ und
- die k-te Zeile von (II) ist ebenfalls $z_\ell^- = z_k^-$.

Ein Vergleich von (I) und (II) ergibt: $A[k \mid j]$ und $A[\ell \mid j]$ haben die gleichen Zeilen, bis auf die Permutation der Zeilen!!

Man kann durch wiederholte Zeilenumformunten aus Typ 1 $A[\ell \mid j]$ aus $A[k \mid j]$ erhalten, indem man die $(\ell-1)$-te Zeile in (I) bis zur k-ten Zeile in (II) rückt. Dafür benötigt man $(\ell-1)-k$ Transpositionen, genauer benötigen wir dafür die Permutationen $(\ell-1\ \ell-2)$, dann $(\ell-2\ \ell-3)$, $\cdots$, $(\ell-(\ell-k-1)\ \ell-(\ell-k))$ i.e. bis $(k+1\ k)$.

Setze $\pi := (k+1\ k)\cdots(\ell-1\ \ell-2)$. Dann ist $sign(\pi) = (-1)^{(\ell-1)-k}$. Also $D_{\ell j}(A) = (-1)^{(\ell-1)-k} D_{kj}(A)$ (siehe Lemma 9.1 (ii)).

Zurück zu $(*)$:

$$\delta(A) = (-1)^j \Big[\underbrace{(-1)^k a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{(-1)^{2\ell-1-k} a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{2. Term}} \Big]$$

Aber $(-1)^k = -[(-1)^{2\ell-1-k}] = (-1)^{2(\ell-1)-k}$.

Also kürzen sich 1. Term und 2. Term ab und damit ist $\delta(A) = 0$ wie behauptet.

Wir berechnen nun $\delta(I_n) = 1$. Für $A = I_n; a_{ij} = 0$, wenn $i \neq j$. Also betrachte nun $i = j$, i.e. $a_{jj} = 1$. Wir bekommen $\delta(I_n) = (-1)^{2j}.a_{jj} \det(I_{n-1}) = (-1)^{2j}.1.1 = 1$. $\square$

Aus Satz 10.7 erhalten wir unmittelbar LA I Satz 28.5:

Korollar 10.8. (Spaltenentwicklung)
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Für jedes $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$

11 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im diesem Skript werden wir weitere Eigenschaften und Formelberechnungen für die Determinante finden, und damit Kapitel II beenden.

Ansatz vom Skript 10: A $n \times n$ über R, A_{ij} (auch a_{ij}) bezeichnet der ij-te Koeffizient von A.

Definition 11.1. $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i \mid j] = (-1)^{i+j} D_{ij}$ ist der ij-te *Kofaktor von* A.

Korollar 10.8 besagt also dass für jede j-te Spalte gilt: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$.

Lemma 11.2.
$k \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = 0$.

Beweis:
Ersetze die j-te Spalte von A durch ihre k-te Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B. Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik}$ für alle i. B hat zwei gleiche Spalten, also ist $\det(B) = 0$. Nun ist $B[i \mid j] = A[i \mid j]$. Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\ B_{ij}\ \det B[i\ |j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\ A_{ik}\ \det A[i\ |j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\ C_{ij} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir fassen zusammen:

Korollar 11.3. $\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\ C_{ij} = \delta_{jk}\ \det(A)$ $\qquad (*)$

Definition 11.4.
Die zu A *adjungierte Matrix* $adj(A)$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A, das heißt $(adj\ A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j}\ \det A[j \mid i]$.

Die Formeln für Matrix Produkt, gemeinsam mit $(*)$ ergibt:

Korollar 11.5. $(adj\ A)A = \det(A) I_n$. $\qquad (**)$

Lemma 11.6.
$A(adj\ A) = \det(A)I_n$.

Beweis:
Es gilt offensichtlich dass $A^T[i \mid j] = A[j \mid i]^T$.
Wir berechnen wegen Satz 10.4:
$(-1)^{i+j} \det A^T[i \mid j] = (-1)^{i+j} \det A[j \mid i]$
(ij-te Kofaktor von A^T = ji-te Kofaktor von A).
Also $adj(A^T) = (adj A)^T$ $\quad (***)$

Nun impliziert $(**)$ für A^T: $(adj A^T)A^T = (\det A^T)I_n = (\det A)I_n$.
Zusammen mit $(***)$ erhalten wir: $(adj A)^T A^T = [A(adj A)]^T = (\det A)I_n = A(adj A)$.
Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Korollar 11.7. $A(adj A) = (\det A)I_n$ und $(adj A)A = \det(A)I_n$. $\quad (\dagger)$.

Erinnerung (LA I Skript 9): $A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar, falls es $B \in M_{n\times n}(R)$ gibt, so dass $AB = BA = I_n$. Genauso wie für den Fall wo $R = K$ ein Körper, gilt: Wenn B existiert, dann ist B eindeutig; $B := A^{-1}$.

Satz 11.8.
$A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in R^\times$ (eine Einheit in R). Insbesondere wenn $R = K$ ein Körper; dann ist A invertierbar über K genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$, und wenn $R = K[x]$; dann ist A invertierbar über $K[x]$ genau dann, wenn $\det(A) \in K^\times$.
Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1} adj(A)$.

Beweis:
Aus $(\dagger)$ sehen wir: $\det(A)$ invertierbar in R (i.e., eine Einheit von R) $\Rightarrow A$ invertierbar über R und $A^{-1} = (\det A)^{-1} adj A$.
Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)$ ist eine Einheit in R.
Für $R = K[x]$: $f, g \in K[x]; fg = 1 \Rightarrow \deg f + \deg g = 0 \Rightarrow \deg f = \deg g = 0$.
Also sind die Einheiten von R, die $\neq 0$ sind, Skalarpolynome. □

Beispiel 11.9.
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$\det(A) = -2$. A ist nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$. A ist aber invertierbar als Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 11.10.
$R = \mathbb{R}[x]$

$A = \begin{pmatrix} x^2+x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x^2-1 & x+2 \\ x^2-2x+3 & x \end{pmatrix}$

$\det(A) = x+1$ $\quad$ $\det B = -6$
A nicht invertierbar $\quad$ B invertierbar

Lemma 11.11.
Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinanten.

Beweis:
$B = P^{-1}\ A\ P$ für $A, B \in M_{n\times n}(K)$

$\det B = \det(P^{-1}\ AP) = \det(P)^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A)$ □

Wegen Lemma 11.11 können wir nun folgendes definieren:

Definition 11.12.
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\dim(V) = n$ und $T : V \longrightarrow V$ ist ein linearer Operator. Wir definieren $\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$ für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von V.

Wir beenden das Skript, und somit den Kapitel mit einer nützlicher Formel:

Satz 11.13. Cramer's Regel
Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $\det(A) \neq 0$ und $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$.

Betrachte das lineare Gleichungssystem: $AX = Y$. Dann kann man seine eindeutige Lösung $X = A^{-1}Y$ so beschreiben: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, wobei $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ und B_j die $n \times n$-Matrix ist, die man erhält, wenn man die j-te Spalte von A durch Y ersetzt.

Beweis:
Es gilt $adj(A)AX = adj(A)Y$, also (wegen Korollar 11.7) gilt: $(\det A)X = adj(A)Y$

Also $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n}(adj A)_{ji}y_i$

Also gilt für $1 \leq j \leq n$, dass $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}y_i\ \det A[i \mid j] = \det B_j$. □

12 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL III: NORMALFORMEN.

In diesem Kapitel werden wir die mögliche Matrixdarstellungen für lineare Operatoren T auf ein K- Vektorraum V noch genauer untersuchen, als wir es in der LA I (Kapitel 3; ab Skript 20) gemacht hatten. Wir werden uns darum bemühen zu verstehen, ob wir besonders "schöne" Matrixdarstellungen finden können. Das heißt, wir werden versuchen besonders "geeignete" Basen für T und V zu finden, wenn das möglich ist. In Skript 12 fangen wir damit an.

§ 9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei V ein n- dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 12.1.

(a) Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann ist $c \in K$ ein *Eigenwert von* T, falls ein $\alpha \in V$ existiert mit $\alpha \neq 0$ und

$$T(\alpha) = c\alpha.$$

(b) Sei $\alpha \in V$ und $T(\alpha) = c\alpha$, dann heißt α *Eigenvektor* (zum Eigenwert c).

(c) $W_c := \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = c\alpha\}$ ist ein Unterraum, der *Eigenraum* (zum Eigenwert c).

Bemerkung 12.2.
$W_c = \ker(cI - T)$, d.h. $W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (cI - T)\alpha = 0\}$.

Wir folgern aus Satz 11.8, Bemerkung 12.2 und Definition 11.2 :

Satz 12.3.
Seien $T \in \mathcal{L}(V,V), c \in K$. Äquivalent sind:

(i) c ist Eigenwert von T.

(ii) $(cI - T)$ ist nicht invertierbar.

(iii) $\det(cI - T) = 0$.

Satz 12.4.
$\det(xI - T)$ ist ein normiertes Polynom von Grad $n = \dim\,(V)$. Die Eigenwerte von T sind also genau dessen Nullstellen, T kann also höchstens n Eigenwerte in K haben.

Beweis:
Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$, $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Es ist $xI - A = [xI - T]_{\mathcal{B}}$.

Nun ist
$$B := xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & \\ & & x - a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } b_{ii} = (x - a_{ii})$$
Also sind die Einträge vom B Polynome vom Grad 0 oder 1 oder das Nullpolynome und
$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \underbrace{(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}}$.
Wir berechnen:
$\deg\ (b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : \tau(i) = i\}|$.
Also ist $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$ der einzige Term von Grad n, und somit der Hauptterm. Wir sehen also, dass
$\deg \left(\sum_{\tau}(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)} \right) = n$ und außerdem, dass $\det(xI - A)$ ein normiertes Polynom ist. Die letzte Aussage folgt wegen Satz 12.3 und Korollar 4.3. $\square$

Definition 12.5.
$c \in K$ ist ein Eigenwert von $A \in Mat_{n\times n}(K)$, falls $(cI - A)$ singulär ist. Also sind die Eigenwerte von A die Nullstellen von $\det(xI - A)$.

Definition 12.6.
$f(x) := \det(xI - A)$ ist das charakteristische Polynom von A.

Lemma 12.7.
Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

Beweis
Für $B = P^{-1}AP$ gilt
$\det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) = \det P^{-1} \det(xI - A) \det P = \det(xI - A)$. $\square$

Definition 12.8.
Sei V endlich dim; $T \in \mathcal{L}(V, V)$.
$$\text{Char. Pol. } (T) := \text{ Char. Pol. } ([T]_{\mathcal{B}})$$
für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von V (und damit für jede Basis).

Beispiel 12.9.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$
hat keine reelle Eigenwerte, weil $\det(xI - A) = x^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$\text{Char. Pol. } (A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Eigenwerte $c = 1,\ c = 2 \in \mathbb{R}$.

- $c = 1 \quad \ker(A - I) := W_1$

$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ hat Rang $= 2$, also $\dim W_1 = 1$.

Wir wollen eine Basis für W_1 finden. Löse

$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = (1, 0, 2)$ ist eine Lösung und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1.

- $c = 2 \quad \ker(A - 2I) := W_2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ hat Rang $= 2$, also $\dim W_2 = 1$.

Finde Lösung wie oben: $\alpha_2 = (1, 1, 2)$ und $\{\alpha_2\}$ ist eine Basis für W_2.

Lemma 12.10.
Seien c_i für $i = 1, \dots, k$ Eigenwerte von T, und nehme an dass $c_i \neq c_j$ für alle $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Sei $v_i \neq 0\,; v_i \in V$ Eigenvektor zum Eigenwert c_i. Dann ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig.

Beweis:
Bemerke, dass $v \in V, v \neq 0 \Rightarrow v$ kann nicht Eigenvektor zu verschiedenen Eigenwerten sein.
Wir führen einen Beweis per Induktion: $k = 2$.
Ist $v_2 = cv_1$, so ist $v_2 \in W_{c_1}$, also ist v_2 ein Eigenvektor zur c_1 und $c_2 \neq c_1$. Widerspruch.
Induktionsannahme gelte für $k - 1$.
Seien $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig. OE haben wir also $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$

$T(v_k) = c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i$ und $T(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$

$\Rightarrow c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i) v_i = 0$

$\Rightarrow c_k - c_i = 0 \Rightarrow c_k = c_i$ (mit $i = 1, \dots, k-1$).
Widerspruch. $\square$

Korollar 12.11.
Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$. Nimm an, dass T n-verschiedene Eigenwerte $d_1, \ldots, d_n$ in K hat. Dann hat V eine Basis $\mathcal{D}$, bestehend aus Eigenvektoren von T.

Definition 12.12.
Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$. T ist diagonalisierbar (über K), falls V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

Bemerkung 12.13.
Seien $d_1, \ldots, d_n$ verschiedene Eigenwerte von T und $\mathcal{D}$ eine Basis wie im Korollar 12.1. Dann ist $[T]_{\mathcal{D}}$ diagonal.

13 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir das Charakteristische Polynom weiter analysieren, und in Satz 13.3 ein wichtiges Kriterium für die Diagonalisierbarkeit folgern.

Bemerkung 13.0
$\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1, \dots, d_n$ sind verschiedene Eigenwerte, α_i ist Eigenvektor zum Eigenwert d_i. Setze $\mathcal{D} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ eine Basis und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

eine diagonale Matrix.

Korollar 13.1.
Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1, \dots, d_k$ verschiedene Eigenwerte. Für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i}$ linear unabhängig. Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ auch linear unabhängig.

Beweis:
Sei $L := \{v_1, \dots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}$. Betrachte eine lineare Kombination $\sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j$. Nun setze $L_i := L \cap \mathcal{B}_i$ und setze $\alpha_i := \sum_{v_j \in L_i} c_j v_j$ $(*)$
falls $L_i \neq \varnothing$ (und $\alpha_i := 0$ per Konvention, falls $L_i = \varnothing$). Dann ist $\alpha_i \in W_{d_i}$.
Also ist $0 = \sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ nur möglich, wenn $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$.

(Da sonst die $\alpha_i \neq 0$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten **und** gleichzeitig linear abhängig wären. Widerspruch zu Lemma 12.10).

Nun sind die v_j in $(*)$ linear unabhängig. Also $c_j = 0$ für alle j wie behauptet. □

Lemma 13.2.
Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1, \dots, d_k$ die verschiedenen Eigenwerte von T. Es gilt: T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.

Beweis:
"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von Eigenvektoren. Setze $\mathcal{B}_j := \mathcal{B} \cap W_{d_j}$.

Also ist $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

Setze $\ell_j := |\mathcal{B}_j|$. Also ist $n = |\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} \ell_j$.

Behauptung:
$\ell_j = \dim W_{d_j}$.
Es ist klar, dass $\ell_j \leq \dim W_{d_j}$. Ist $\ell_i < \dim W_{d_i}$, dann existiert ein $\beta \in W_{d_i}$ mit $\mathcal{B}_i' := \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$ linear unabhängig. Aber dann ist

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\beta\} = \dot{\bigcup_{j \neq i}} \mathcal{B}_j \cup \mathcal{B}_i'$$

linear unabhängig (Korollar 13.1) und $|\mathcal{B}'| = n + 1$. Widerspruch (unmöglich).

"$\Leftarrow$" Sei $\sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$ und $\mathcal{B}_j$ eine Basis für W_{d_j} für jedes $j = 1, \ldots, k$.
Setze $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Dann ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig (Korollar 13.1)
und $|\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{B}_j| = \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.
Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis für V und besteht aus Eigenvektoren von T. Also ist T diagonalisierbar. □

Sei nun $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ diagonalisierbar, $d_1, \ldots, d_k$ die verschiedenen Eigenwerte und $\mathcal{D}$ eine Basis bestehend aus Eigenvektoren (und geordnet, so dass die ersten Basisvektoren Eigenvektoren zu d_1 sind, d_2 usw.). Dann ist

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & d_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & d_k & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_k \end{pmatrix}$$

wobei für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ erscheint d_i ℓ_i-mal mit

$$\ell_i := \dim W_{d_i}$$

und damit ist Char. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$ $(*)$

Umgekehrt, ist Char. Pol. (T) wie in $(*)$ (mit $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$ und $\ell_i = \dim W_{d_i}$), dann ist T diagonalisierbar, weil $\sum_{i=1}^{k} \dim W_{d_i} = n$ ist (siehe Lemma 13.2).

Wir haben bewiesen:

Satz 13.3.
Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Es gilt: T ist diagonalisierbar genau dann, wenn
Char. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$, wobei die Vielfachheit ℓ_i der Nullstelle d_i ist gleich $\dim W_{d_i}$.

Terminologie:
$\dim W_d$ wird auch **geometrische Vielfachheit** der Nullstelle d genannt.

Im Allgemeinen gilt:

Satz 13.4.
Sei $\dim(V)$ endlich, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sei d ein Eigenwert von T mit Vielfachheit μ. Es gilt: $\ell := \dim(W_d) \leq \mu$.

Beweis:
Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ eine Basis von W_d.
Ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1}, \dots \alpha_n\}$ von V.
Es ist

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & B & \\ 0 & & d & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & & C & \end{array}\right)$$

Wir berechnen Char. Pol. (A) (siehe ÜB):

$$\det(xI - A) = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} x-d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & -B & \\ 0 & & x-d & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & & xI-C & \end{array}\right) = (x-d)^\ell \det(xI - C)$$

Also ist $\ell \leq \mu$. □

Beispiel 13.5.
• T in den Beispielen 12.9. sind beide **nicht** diagonalisierbar.

• $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Char. Pol. $(A) = (x-1)(x-2)^2$.

$d_1 = 1$

$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

Rang $(A-I) \neq 3$, weil $A-I$ singulär ist. Es ist klar, dass Rang $(A-I) \geq 2$. Also Rang $(A-I) = 2$.

$d_2 = 2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

Rang $(A-2I) = 1$.

Also ist $\dim W_{d_1} = 1$ und $\dim W_{d_2} = 2$ und $\dim W_{d_1} + \dim W_{d_2} = 3$. Also ist T diagonalisierbar: Es existiert eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir ein weiteres wichtiges Polynom definieren, und die Beziehung zwischen Minimale Polynom und Charakteristische Polynom untersuchen.

§ 10 Annihilator Ideal

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Proposition 14.1.
Es gelten:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{p \in K[x] \mid p(T) = 0\}$ ist ein Ideal.

(2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$.

Beweis

(1) Es genügt zu bemerken dass $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$ und $(pq)(T) = p(T)q(T)$, für alle $p, q \in K[x]$.

(2) Setze $\dim V = n$. Betrachte die Elemente $I, T, T^2, \dots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V,V)$.
Da $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$, sind diese Elemente notwendig linear abhängig. Also existiert $c_0, \dots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$ und c_i nicht alle gleich Null. Also ist z.B. das Polynom $c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n^2} x^{n^2} \in \mathcal{A}(T)$. □

Definition 14.2.
$\mathcal{A}(T)$ heißt *annihilator Ideal.* Der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das *Minimale Polynom von T*; bezeichnet als Min. Pol. (T).

Bemerkung 14.3.

1. deg (Min. Pol. (T)) $\leq n^2$.

   In skript 15 werden wir eine bessere obere Schranke bekommen!

2. $p :=$ Min. Pol. (T) ist das normierte Polynom vom kleinsten Grad in $\mathcal{A}(T)$. Ist also charakterisiert durch:

   (a) $p \in K[x]$

   (b) $p(T) = 0$

   (c) für alle $q \in K[x] : \deg q < \deg p \Rightarrow q(T) \neq 0$.

Definition 14.4.
Für $A \in Mat_{n\times n}(K)$ sind $\mathcal{A}(A)$ und Min. Pol. (A) analog definiert.

Bemerkung 14.5.

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Für $f \in K[x]$ gilt $[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$ (ÜB).

Für $A = [T]_{\mathcal{B}}$ gilt also: $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$.

(2) Wir halten fest: ähnliche Matrizen das gleiche minimale Polynom.

Satz 14.6.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ (oder $A \in Mat_{n\times n}(K)$). Es gilt: Char. Pol. (T) und Min. Pol. (T) haben (bis auf Vielfachheit) dieselben Nullstellen .

Beweis:
Seien $p :=$ Min. Pol. (T) und $c \in K$. Zu zeigen: $p(c) = 0 \Leftrightarrow c$ ist Eigenwert von T.

"$\Rightarrow$" $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x-c)q$; $\deg q < \deg p$. Also ist $q(T) \neq 0$.
Wähle $\beta \in V$ mit $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$.
Es gilt $0 = p(T)(\beta) = (T - cI)q(T)(\beta) = (T - cI)(\alpha)$. Also ist $\alpha \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert c.

"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei $T(\alpha) = c\alpha; \alpha \neq 0, \alpha \in V, c \in K$.
Nun gilt $p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$ (ÜB).
Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$, folgt daraus $p(c) = 0$. □

Proposition 14.7.
Sei T diagonalisierbar. Dann zerfällt Min. Pol. (T) in verschiedene lineare Faktoren.

Beweis:
Sei T diagonalisierbar, $c_1, \dots, c_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte, setze $p :=$ Min. Pol. (T). Satz 14.6 impliziert dass $\deg p \geq k$ ist.
Betrachte das Polynom $q(x) := (x - c_1)\cdots(x - c_k)$. Es gilt: $(T - c_1I)\cdots(T - c_kI)(\alpha) = 0$ für jeden Eigenvektor α (weil α Eigenvektor zum Eigenwert c_i ist, für ein geeignetes i). Da es eine Basis von Eigenvektoren gibt, ist $q(T) = 0$, also ist $q \in \mathcal{A}(T)$, und damit wegen Bemerkung 14.3 gilt nun $p = q$. □

Wir werden später die Umkehrung von Proposition 14.7 auch beweisen.

Beispiel 14.8. Nun berechnen wir das minimale Polynom für das Beispiel in 12.9 (ii). Wir bezeichnen p als minimales Polynom. Da T nicht diagonalisierbar ist, können wir Proposition 14.7 nicht anwenden, aber Satz 14.6 können wir anwenden.

Da Char. Pol. $(T) = (x-1)(x-2)^2$ ist, hat p die Nullstellen 1 und 2. Wir probieren Polynome der Form
$$(x-1)^k(x-2)^\ell \text{ mit } k \geq 1 \text{ und } \ell \geq 1$$
("prüfen", ob sie T annihilieren).

$(x-1)(x-2)$:
$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$
Also ist $\deg(p) \geq 3$. Nun probieren wir
$$(x-1)^2(x-2) \text{ oder } (x-1)(x-2)^2$$
$(A-I)(A-2I)^2 = 0$. Also ist hier Char. Pol. (T) = Min. Pol. (T).

Der Satz von Cayley Hamilton, den wir in Skript 15 beweisen, wird uns helfen weniger "prüfen" zu müssen...

15 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst den Satz von Cayley Hamilton aussagen und beweisen, der Satz ist u.a. für die Berechnung von MinPol sehr hilfreich. Wir beenden Abschnitt 10 indem wir die folgende wichtige Frage beantworten: Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Q})$. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist auch $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ und sogar $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. Ändern sich deshalb die charakteristischen und minimalen Polynome von A? Im Abschnitt 11 werden wir den Begriff von Trigonalisierbarkeit (der arme Vetter von Diagonalisierbarkeit) einführen und studieren.

Satz von Cayley Hamilton.
Sei V ein n- dimensionaler K-Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V,V)$, $f :=$ Char. Pol. (L).
Es gilt $f(L) = 0$. Insbesondere teilt Min. Pol. (L) das Char. Pol. (L).

Beweis:
Seien $\mathcal{K}$ die Algebra der Polynome in L und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V.
Setze $A := [L]_{\mathcal{B}}$, das heißt $L(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j$ für alle $1 \le i \le n$.
Wir schreiben diese Gleichungen um, als

(1) $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij}L - A_{ji}I)(\alpha_j) = 0$ für alle $1 \le i \le n$.

Sei B die $n \times n$-Matrix mit dem Koeffizienten in der Algebra $\mathcal{K}$ definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij}L - A_{ji}I.$$

Behauptung: Es ist $\det B = f(L) = 0$. Wir argumentieren wie folgt:

Wir haben $f(x) = \det(xI - A) = \det(xI - A)^T$. Wir berechnen: $(xI - A)^T_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ji}$. Also ist $(xI - A)^T_{ij}(L) = \delta_{ij}L - A_{ji}I = B_{ij}$. Außerdem gilt: $[\det(xI - A)^T](L) = \det[(xI - A)^T(L)]$ (siehe ÜB). Somit gilt

$$f(L) = [\det(xI - A)](L) = [\det(xI - A)^T](L) = \det[(xI - A)^T(L)] = \det B.$$

Wir zeigen nun dass $\det B = 0$. Dafür genügt es zu zeigen dass $(\det B)(\alpha_k) = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Wegen (1) gelten für B_{ij} und α_j:

(2) $\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0$ für alle $1 \le i \le n$.

Setze $\tilde{B} := adj B$. Aus (2) folgt für alle k und i: $\tilde{B}_{ki}(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j$.

Wir summieren über i und bekommen:

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\right)}_{kj\text{-te Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j).$$

Nun ist (wegen Korollar 11.7) $\tilde{B}B = (\det B)I$, also $\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij} = \delta_{kj} \det B$.

Also $0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}(\det B)(\alpha_j) = (\det B)(\alpha_k)$. □

Nu beantworten wir die **Wichtige Frage** der Einleitung. Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung; wir bemerken dass $Mat_{n\times n}(F_0) \subseteq Mat_{n\times n}(F_1)$.

Satz 15.1. Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung. Sei $A \in Mat_{n\times n}(F_0)$, und seien

$$\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_0}(A)$$

beziehungsweise

$$\text{Char. Pol.}_{F_1}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_1}(A)$$

die charakteristischen bzw. minimalen Polynome von A jeweils als Element aus $Mat_{n\times n}(F_0)$ und $Mat_{n\times n}(F_1)$. Dann gelten:

(1) $\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) = \text{Char. Pol.}_{F_1}(A)$ und

(2) $\text{Min. Pol.}_{F_0}(A) = \text{Min. Pol.}_{F_1}(A)$.

Beweis:

(1) Ist offensichtlich, weil $\det(B)$ nur von Koeffizienten der Matrix B abhängen.

(2) (i) Wir untersuchen zunächst die folgende Frage: Wie entscheiden wir, für den gegebenen Körper K und der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit $\deg(p) = k$ und $p(A) = 0$?

Dafür lösen wir ein Matrixgleichungssystem

$$A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \cdots + x_0 I = 0 \qquad (*)$$

$(*)$ ist also ein lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Jede Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1} \in K$ gibt uns ein Polynom $p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$ mit $p(x) \in \mathcal{A}(A)$.

Wenn wir $(*)$ für die kleinste natürliche Zahl k, für die es eine Lösung gibt, gelöst haben, dann ist die Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1}$ eindeutig, weil sie uns liefert die eindeutig definierten Koeffizienten $1, a_{k-1}, \ldots, a_0$ von $\text{Min. Pol.}_K(A)$ von A über K.

Wir folgern: Sei k minimal, so dass $(*)$ eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das $\text{Min. Pol.}_K(A)$.

(ii) Nun untersuchen wir Lösungen für LGS:
Sei $B \in Mat_{m\times n}(F_0)$, $F_0 \subseteq F_1$ Körpererweiterung, $Y \in F_0^{m\times 1}$. Betrachte

$$BX = Y \qquad \text{(S)}$$

Wir behaupten: wenn (S) eine Lösung in $F_1^{n\times 1}$ hat, dann hat (S) auch eine Lösung in $F_0^{n\times 1}$ (und umgekehrt natürlich!): Dies gilt, weil alleine aus der r.Z.S.F. $(B\,|Y)$ können wir entscheiden ob es Lösungen gibt (siehe LA I Script 6; Satz 6.3 **Zweck**). Nun ist aber die r.Z.S.F. einer Matrix eindeutig (insbesondere unabhängig vom betrachtetem Grundkörper), also ist r.Z.S.F. $(B\,|Y)$ bzgl. F_1 gleich r.Z.S.F. $(B\,|Y)$ bzgl F_0.

Aus (i) und (ii) sehen wir, dass $(*)$ eine Lösung $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in F_1^k$ genau dann hat, wenn es eine Lösung in F_0^k hat. Die Eindeutigkeit des Min. Pol.$_{F_1}$ liefert außerdem, dass die Lösung in F_0^k auch $(a_0, \dots, a_{k-1})$ sein muss! □

§ 11 Trigonalisierbarkeit, invariante Unterräume

Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum.

Definition 15.2.
$T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt, so dass $[T]_\mathcal{B}$ eine *obere Dreiecksmatrix* (i.e. $a_{ij=0}$ für $i > j$) ist.

Satz 15.3.
Sei V n-dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt: T ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ Char. Pol. (T) zerfällt in Linearfaktoren über K (i.e. Char. Pol. $(T) = (x-c_1)^{n_1} \cdots (x-c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$).

Beweis

"$\Rightarrow$" Klar, weil $[T]_\mathcal{B} = A$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $\det(xI - A)$ ist das Produkt $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$ (siehe ÜB).

"$\Leftarrow$" Wir werden per Induktion eine Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ aufbauen, in der $[T]_\mathcal{B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da T wenigstens einen Eigenwert hat, hat T auch einen Eigenvektor zum Eigenwert $c_1 \in K$. Sei $\alpha \neq 0$ solch ein Eigenvektor und ergänze zu einer Basis $\{\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ für V (geordnet, so dass α der erste Vektor davon ist).
Betrachte diesbezüglich die Matrixdarstellung von T:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \quad \Big\} \Gamma \in Mat_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W,W)$, wobei $W := span\{\beta_2, \dots, \beta_n\}$ definiert durch $Gw := \Gamma w$, für alle $w \in W$. Wir sehen also Char. Pol. $(T) = (x - c_1)$ Char. Pol. (G). Da Char. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist, so ist es auch Char. Pol. (G). Die Induktionsannahme liefert eine Basis $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, in der G eine obere Dreiecksmatrix-Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array}\right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und setze $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ □

16 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skripte 16 und 17 werden wir T-invariante Unterräume sowie die Matrixdarstellung von T diesbezüglich studieren. Wir schließen Skript 16 mit einer Erinnerung aus der LA I.

§ 12 Invariante Unterräume

Sei V ein n-dimensionaler K- Vektorraum.

Definition 16.1.
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann ist W *T-invariant*, falls $T(W) \subseteq W$.

Beispiel 16.2.

(0) $\{0\}$ und V sind T-invariant für alle T.

(1) Sei D der Ableitung Operator auf $V = K[x]$ und $W := K[x]_{\leq d} = \{f; f = 0 \text{ oder deg f } \leq d\}$. Dann ist W D-invariant.

(2) Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $TU = UT$, setze

   (a) $W := \text{Im }(U)$

   (b) $N := \ker(U)$

   Dann sind W und N T-invariant.

   Beweis:

   (a) Sei $\alpha \in \text{Im }(U)$, $\alpha = U(\beta)$; $T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \text{Im }(U)$

   (b) $\alpha \in N; U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0 \Rightarrow T(\alpha) \in N$

(3) $W \subseteq V$ ist T-invariant $\Rightarrow W$ ist $g(T)$-invariant für alle $g \in K[x]$ (ÜB).

(4) Für alle $g \in K[x]$ gilt $g(T)T = Tg(T)$ (ÜA). Insbesondere gilt dies für $g(T) := cI - T$. Wegen (2) ist also $\ker(T - cI)$ T-invariant; i.e. der Eigenraum W_c zum Eigenwert c ist T-invariant.

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

   Setze $T := T_A$. Wir behaupten, dass nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ T-invariant sind: Sei $W \neq V, W \neq \{0\}$ T-invariant. Es gelte aber dann daraus, dass $\dim W = 1$. Sei $\alpha \neq 0, \alpha \in W; \{\alpha\}$ ist eine Basis und damit ein Eigenvektor (weil $T(\alpha) \in W$, also $T(\alpha) = c\alpha$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$). A hat aber keine reellen Eigenwerte.

- **Der Operator T_W:**

Sei W T-invariant, setze $T_W := T \upharpoonright_W$. Dann ist $T_W \in \mathcal{L}(W, W)$ (ÜA).

- **Matrix-Darstellung von T_W:**

Sei $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum mit dim. $W = r$.
Sei $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ eine Basis für W. Ergänze $\mathcal{B}'$ zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$ für V.
Betrachte $A := [T]_{\mathcal{B}}$. Wir haben die Gleichungen

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i$$

W ist T-invariant $\Rightarrow T\alpha_j \in W$ für $j \leq r$. Also $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{ij}\alpha_i$ für $j \leq r$, das heißt $A_{ij} = 0$ für $j \leq r$ und $i > r$. Also sieht A aus:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r, C$ $r \times (n-r)$ und D $(n-r) \times (n-r)$ sind. Es ist darüber hinaus klar, dass $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 16.3.
Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant. Es gelten:

(i) Char. Pol. (T_W) teilt Char. Pol. (T).

(ii) Min. Pol. (T_W) teilt Min. Pol. (T).

Beweis:

(i) Ist klar, weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

und somit ist $\det(xI - A) = \det(xI - B)\det(xI - D)$, wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

(ii) Beachte, dass

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$

wobei gilt: C_k ist $r \times (n-r)$. Also jedes Polynom das A annihiliert, annihiliert auch damit B. Also Min. Pol. (B) teilt Min. Pol. (A). $\square$

Wir werden in der nächsten Vorlesung die Matrix D genauer untersuchen.

Erinnerung (Quotientenraum und direkte Summen aus Lineare Algebra I; Skripte 26 und 27):

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. $V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ mit $c(\alpha + W) = c\alpha + W$ für $c \in K$ und $(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta) + W$ für $\alpha, \beta \in V$.
Bezeichnung: $\alpha + W := \overline{\alpha}$.

(2) **Kanonischer Homomorphismus**
$\pi : V \twoheadrightarrow V/W$
$\pi(\alpha) := \alpha + W$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W$.

(3) **Isomorphiesatz**
Sei $\varphi : V \to U$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen. Es gilt: $V/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\ \varphi$.

(4) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Man schreibt $V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe), falls $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Das heißt für alle $\alpha \in V$ existiert genau ein $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, so dass $\alpha = w_1 + w_2$.

Projektion Homomorphismus
$\pi : W_1 \oplus W_2 \twoheadrightarrow W_2; \pi(w_1 + w_2) := w_2$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$. Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

(5) Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant. Die Abbildung

$$\overline{T} : V/W \to V/W$$

wird so definiert:

$$\overline{T}(\overline{\alpha}) = \overline{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}.$$

Sie ist wohldefiniert, i.e. $\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$, weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$. Sie ist auch linear; i.e. $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$.

17 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Wir setzen die Untersuchung der Matrixdarstellung begonnen in Abschnitt 12, Skript 16 fort.

Sei V ein endlich dimensionaler K- Vektroraum.

Lemma 17.1.

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum; $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W, $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine ergänzende Basis für V. Dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W.

(2) Umgekehrt sei $\{\overline{\alpha}_{r+1}, \ldots \overline{\alpha}_n\}$ eine Basis für V/W, dann ist $\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, \ldots \alpha_n\}$ eine Basis für V.

Siehe ÜB.

Satz 17.2.
Sei $W \subseteq V, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und W T-invariant. Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W, ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \,\dot\cup\, \mathcal{B}''$ von V. Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$, $D = [\overline{T}]_{\overline{\mathcal{B}''}}$, und $\overline{\mathcal{B}''} = \{\overline{\alpha}; \alpha \in \mathcal{B}''\}$.

Beweis:
Setze $r := \dim W$; sei $\mathcal{B}' := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$ die geordnete Basen.
Die Aussage über die $r \times r$ matrix B ist bereits in der 16. Vorlesung bewiesen worden.
Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix D. Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j \text{ für } 1 \le i \le n \qquad (*)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B \\ r \times r \\ --- \end{matrix} & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{|\ \mathcal{B}'\ |=r}, \underbrace{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n}_{|\ \mathcal{B}''\ |=(n-r)}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \{\underbrace{\overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \overline{\alpha_n}}_{|\ \mathcal{B}''\ |=n-r}\}$$

Schreibe

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B \\ --- \end{matrix} & \begin{matrix} A_{1r+1} \\ \vdots \\ A_{r(r+1)} \\ A_{(r+1)(r+1)} \\ \vdots \\ A_{n(r+1)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} A_{1n} \\ \vdots \\ A_{rn} \\ A_{(r+1)n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{matrix} \end{array} \right)$$

oder für $1 \le i \le n$

$$T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\alpha_j \qquad (**)$$

und damit ist:

$$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i}) \text{ für } r+1 \le i \le n$$ □

Aus Satz 17.2 (und Aufgabe 8.1 d)) folgt nun:

Korollar 17.3. Char. Pol. T = (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$).

Für eine analogue Aussage über Min. Pol. T siehe ÜB.

Bemerkung 17.4.
Die Aussage im Korollar 17.5 haben wir schon in Skript 15 bewiesen. Hier geben wir einen zweiten Beweis mithilfe von T_W und $\overline{T}$.

Korollar 17.5.
T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis:

"$\Rightarrow$" wie im Beweis vom Satz 15.3.

"$\Leftarrow$" Wir wollen eine Basis $\mathcal{B}$ für V aufbauen, so dass die Matrixdarstellung von T eine Dreieckmatrix ist. Diese Basis bauen wir auf per Induktion nach $\dim V$.

Induktionsanfang: $n = 1$ ist trivial. I. Induktionsannahme: die Aussage gelte für jeden $n-1$-dimensionalen K- Vektroraum.

Induktionsschritt: Sei c_1 irgendein Eigenwert von T und $\alpha_1 \neq 0$ ein Eigenvektor dazu.

Setze $W := \{c\alpha_1; c \in K\}$. Dann ist W T-invariant: für $\alpha \in W$; $\alpha = c\alpha_1$ gilt: $T(c\alpha_1) = cT(\alpha_1) = cc_1\alpha_1 = c_1 c\alpha_1 \in W$.

Wir haben $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$ und $T_W \in \mathcal{L}(W, W)$, und wegen Korollar 17.3

Char. Pol. T = (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$) (†)

Wir wollen Char. Pol. T_W berechnen. Nun gilt $T_W(\alpha) = c_1\alpha$ für alle $\alpha \in W$.

Also $A_W := [T_W]_{\{\alpha_1\}} = [c_1]$ und $\det(xI - A_W) = \det(x.1 - c_1) = (x - c_1)$.

Also bekommen wir mit (†):

Char. Pol. $T = (x - c_1)$ Char. Pol. $\overline{T}$.

Wir sehen also, dass auch Char. Pol. $\overline{T}$ im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Nun ist $\dim V/W = (n-1)$ (LA I Korollar 27.4). Die Induktionsannahme liefert nun eine Basis $\overline{\beta_2}, \ldots, \overline{\beta_n}$ von V/W, wofür die Matrixdarstellung von $\overline{T}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Setze $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ □

Nun betrachten wir die obige Aussage für Min. Pol. (T).

Korollar 17.6.
Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis:
Wir zeigen: Char. Pol. (T) zerfällt im Produkt von linearen Faktoren über K genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

"⇒" Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Da lineare Faktoren irreduzibel sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$, dass auch Min. Pol (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist.

"⇐" Sei Min. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k}(x - c_i)^{\nu_i}$.
Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T) . Also Char. Pol. $(T) =$ Min. Pol. (T) $q(x)$

mit $q(x) \in K[x]$. Wenn $\deg(q(x)) = 0$ dann ist $q(x) = 1$. Sei also $\deg(q(x)) > 0$ und sei $C \supseteq K$ eine Körpererweiterung so dass $q(x)$ zerfällt als Produkt über C:

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell}(x - d_j).$$

(Die Existenz vom *Zerfällungskörper* C werden wir in der Algebra Vorlesung B3 im nächstem Semester beweisen).

Wegen Satz 14.6 und Satz 15.1 haben Min. Pol (T) und Char. Pol. (T) dieselben Nullstellen in C. Wir behaupten nun, dass d_j bereits in K liegt und $d_j = c_i$ für ein geeignetes i. Dies gilt, weil d_j sonst eine Nullstelle von Char. Pol. (T), also auch von Min. Pol. (T) mit $d_j \in C \backslash K$ (i.e. $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$) wäre.
Dies ist aber unmöglich, da Min. Pol. (T) bereits alle seine Nullstellen in K hat. □

18 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 18 und 19 werden wir eine allgemeine Normalform (die Jordan Normalform) kennenlernen, und damit Kapitel III beenden. Im Abschnitt 13 werden wir zunächst die Zerlegung von V als direkte Summe bzgl T etablieren. In Abschnitt 14 werden wir Jordanketten und Zellen einführen.

§ 13 Direkte Summen

Lemma 18.1.
Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \dots, W_k$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $W_1, \dots, W_k$ sind unabhängig, i.e.: sei $\alpha_i \in W_i$ für $1 \leq i \leq k$ so dass $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$. Dann ist $\alpha_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$.

(ii) $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = \{0\}$ für $2 \leq j \leq k$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ eine Basis für W_i, so ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ eine Basis für $W := W_1 + \dots + W_k$.

Siehe ÜB.

Notation und Terminologie:
Wir schreiben $V = W_1 + \dots + W_k$, wenn V nur die Summe der W_i's ist und wir schreiben $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, wenn $V = W_1 + \dots + W_k$ **und** eine der äquivalenten Bedingungen (i), (ii) und (iii) vom Lemma 18.1 gilt. In dem Fall heißt V die *direkte Summe* der W_i's.

Satz 18.2. (Primzerlegung von V bzgl. T).
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Setze Min. Pol. $(T) := p$. Sei $p = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ die Primfaktorisierung in $K[x]$ von p; wobei p_i verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[x]$ und $r_i \in \mathbb{N}$ sind. Setze $W_i := \ker p_i(T)^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$. Dann ist W_i T-invariant für alle i (s. Skript 16), und darüberhinaus gelten:

(i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ und

(ii) Min. Pol. $(T_{W_i}) = p_i^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$.

Hierunter in 18.3 beweisen wir Satz 18.2 für $k = 2$. Der allgemeinere Fall folgt per Induktion nach k.

Proposition 18.3.
Sei $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$, Min. Pol. $(T) = m = m_1 m_2$ mit $ggT(m_1, m_2) = 1$. Setze $V_i := \ker m_i(T)$ für $i = 1, 2$. Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$ und Min. Pol. $(T_{V_i}) = m_i$ für $i = 1, 2$.

Beweis:
Da m_1, m_2 relativprim sind, existiert $q_1, q_2 \in K[x]$ mit $1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$.
Also $I = m_1(T)q_1(T) + m_2(T)q_2(T)$ $(*)$

Behauptung 1:
$V_1 = \mathrm{Im}\ m_2(T)$ und $V_2 = \mathrm{Im}\ m_1(T)$

Beweis der Behauptung 1:
$0 = m(T) = m_1(T)m_2(T)$, weil $m =$ Min. Pol. (T). Also $\mathrm{Im}\ m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$.

Umgekehrt sei $v \in \ker m_1(T)$. Mit $(*)$ gilt

$$v = \underbrace{q_1(T)m_1(T)(v)}_{=0} + \underbrace{m_2(T)q_2(T)(v)}_{\in \mathrm{Im}\ m_2(T)}$$ □

Behauptung 2:
$V = V_1 \oplus V_2$

Beweis der Behauptung 2:

1. Summe: $v \in V$. Mit $(*)$ gilt:
   $$v = \underbrace{m_1(T)q_1(T)v}_{\in \mathrm{Im}\ m_1(T)} + \underbrace{m_2(T)q_2(T)v}_{\in \mathrm{Im}\ m_2(T)}$$
2. Direkt: Sei $v \in V_1 \cap V_2$. Mit $(*)$ gilt:
   $$v = \underbrace{q_1(T)m_1(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_1} + \underbrace{q_2(T)m_2(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_2}$$

□

• Sei nun $\widetilde{m}_i =$ Min. Pol. (T_{V_i}) für $i = 1, 2$. Da $V_i = \ker m_i(T)$, ist es klar, dass $m_i(T_{V_i}) = 0$ für $i = 1, 2$.

Also $\widetilde{m}_1 \mid m_1$ $(**)$
und $\widetilde{m}_2 \mid m_2$.

Behauptung 3:
$\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2$ annihiliert T.

Beweis der Behauptung 3:
Berechne für $v_2 \in V_2$ und $v_1 \in V_1$

$\widetilde{m}_1(T)\widetilde{m}_2(T)(v_2 + v_1) = \widetilde{m}_1(T)[\widetilde{m}_2(T)(v_2) + \widetilde{m}_2(T)(v_1)]$
$= \widetilde{m}_1(T)[0 + \widetilde{m}_2(T)(v_1)] = 0$, da $\widetilde{m}_2(T)(v_1) \in V_1$
(weil V_1 $\widetilde{m}_2(T)$-invariant ist, s. Skript 16; Beispiel 16.2 (2)). □

• Da $\widetilde{m}_2 \widetilde{m}_1$ annihiliert T folgt
$m_1 m_2 = m \mid \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2$ $(***)$

Da m_1, m_2 normiert sind, folgt nun aus $(**)$ und $(***)$, dass $\widetilde{m}_i = m_i$ für $i = 1, 2$. □

Sonderfall vom Satz 18.2:
Sei p_i linear und $r_i = 1$ für alle i. Dann ist $p = (x - c_1)\cdots(x - c_k)$ mit $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$.
In diesem Fall ist $W_i = \ker(T - c_i I) =$ der Eigenraum zum Eigenwert c_i. Der Satz ergibt: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Also hat V eine Basis aus Eigenvektoren und damit ist T diagonalisierbar. Wir haben damit die Umkehrung von Proposition 14.7 gezeigt. Wir haben nämlich bewiesen:

Satz 18.4. (Diag. Kriterium für Min. Pol.)

T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Min. Pol. (T) zerfällt in verschiedene lineare Faktoren über $K[x]$.

§ 14 Jordanketten und Jordan Normalform

Sei V ist ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

- **Definition 18.5:**

  Sei $c \in K$ ein Eigenwert und $0 \neq v_1 \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert c. Seien $\ell \in \mathbb{N}$ und $v_2, \cdots, v_\ell \in V$. Der Vektoren - Tupel $(v_1, \dots, v_\ell)$ ist eine *Jordankette der Länge ℓ zum Eigenwert c*, falls

$$\begin{aligned} (T - cI)v_i &= v_{i-1} && i = 2, \dots, \ell \\ (T - cI)v_i &= 0 && \text{für } i = 1 \end{aligned}$$

- **Lemma 18.6:**

  Sei $(v_1, \dots, v_\ell)$ eine Jordankette. Dann ist $\mathcal{B}' := \{v_1, \dots, v_\ell\}$ linear unabhängig, und $W = \mathit{span}\{v_1, \dots, v_\ell\}$ T-invariant. Die Matrixdarstellung von T_W ist die *Jordanzelle $J_\ell(c)$ der Dimension ℓ zum Eigenwert c*, das heißt:

$$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow J_\ell(c) := \begin{array}{l} \text{Jordanzelle der Dimension} \\ \ell \text{ zum Eigenwert } c \end{array}$$

  (Siehe ÜB).

19 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript beweisen wir Satz 19.2 und untersuchen seine Folgerungen. Damit beenden wir Kapitel III.

Erinnerung:
Sei V ein K-Vektorraum und seien $W \subseteq V, W' \subseteq V$ Unterräume. W' ist *Komplement* von W in V, wenn $V = W \oplus W'$.

Bemerkung 19.1.

1. Komplemente existieren und sind im Allgemeinen nicht eindeutig.
2. Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $v_1^1, \dots, v_s^1 \in V$ linear unabhängig, so dass $span\{v_1^1, \dots, v_s^1\} \cap W = \{0\}$ sind. Dann kann man $\{v_1^1, \dots, v_s^1\}$ zu einer Basis von einem Komplement von W in V ergänzen.

Beweis: ÜA.

Satz 19.2. (Jordan Normalform).
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sei Min. Pol. $(T) = (x-c)^r$ mit $c \in K$. Dann hat V eine Basis aus Jordanketten zum Eigenwert c (eine Jordanbasis). Die längsten Ketten haben die Länge r, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Beachte, dass
$$\ker(T-cI) \subseteq \ldots \subseteq \ker(T-cI)^r = V\,.$$

Behauptung:
Seien $j \geq 2$ und $v^1, \dots, v^s \in \ker(T-cI)^j$ linear unabhängig und $span\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1} = \{0\}$.
Dann gelten:

1. $w^1 := (T-cI)v^1, \dots, w^s := (T-cI)v^s \in \ker(T-cI)^{j-1}$ sind linear unabhängig und
2. $span\{w^1, \dots, w^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-2} = \{0\}$.

Beweis der Behauptung:

1. $0 = (T-cI)^j v^i = (T-cI)^{j-1}\underbrace{(T-cI)v^i}_{w^i}$. Also $w^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$.

   Sei nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i, so $\sum_{i=1}^{s} c_i (T-cI)v^i = 0$.

   Also $(T-cI)\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$. Also $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$, weil $(T-cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = (T-cI)^{j-2}\underbrace{(T-cI)(\sum c_i v^i)}_{0} = 0$.

   Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in span\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1}$.

   Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i. Widerspruch, da $\{v^1, \dots, v^s\}$ linear unabhängig sind.

2. Betrachte nun $\sum c_i w^i$, so dass $(T-cI)^{j-2}(\sum c_i w^i) = 0$.
   Dann ist $(T-cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = 0$, so $\sum c_i v^i = 0$ so $(T-cI)(\sum c_i v^i) = 0$.
   Also $\sum c_i (T-cI)v^i = 0 = \sum c_i w^i$.

□ Beh.

Wir bauen nun eine Basis aus Jordanketten.

• $n_r = \dim\ker(T-cI)^r - \dim\ker(T-cI)^{r-1}$ und schreibe $V = V_r \oplus \ker(T-cI)^{r-1}$.
Sei $\{v_r^1, \dots, v_r^{n_r}\}$ eine Basis für V_r.

Setze $v_{r-1}^1 := (T-cI)v_r^1, \dots, v_{r-1}^{n_r} := (T-cI)v_r^{n_r} \in \ker(T-cI)^{r-1}$ und ergänze zu einer Basis von einem Komplement V_{r-1} von $\ker(T-cI)^{r-2}$ in $\ker(T-cI)^{r-1}$:
$\{v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r}, v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\}$.

• Also $n_{r-1} = \dim\ker(T-cI)^{r-1} - \dim\ker(T-cI)^{r-2} - n_r$ und $\ker(T-cI)^{r-1} = V_{r-1} \oplus \ker(T-cI)^{r-2}$.

• Wir verfahren so weiter für jedes $i = r-2, \cdots, 1$. Dabei berechnen wir immer:

$$n_i = \dim\ker(T-cI)^i - \dim\ker(T-cI)^{i-1} - n_r - \cdots - n_{i+1}\,.$$

• Im letzten Schritt bekommen wir
$v_1^1 = (T-cI)v_2^1, \dots, v_1^{n_r+\cdots+n_2} = (T-cI)v_2^{n_r+\cdots+n_2}$, welches wir zu einer Basis von $\ker(T-cI)$ ergänzen:
$v_1^1, \dots, v_1^{n_r+\cdots+n_2}, v_1^{n_r+\cdots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\cdots+n_2+n_1}$.

Insbesondere ist

$$n_1 = \dim\ker(T-cI)^1 - \dim\ker(T-cI)^0 - n_r - \cdots - n_2 = \dim\ker(T-cI) - \sum_{i=2}^{r} n_i\,.$$

• Dies ist die Gestalt der gesamt Jordanbasis für V, die wir erhalten (wobei jede "Spalte" hierunten ist eine Jordankette):

$$\begin{array}{cccc}
v_r^1, \dots, v_r^{n_r}, & & & \\
v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r}, & v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}, & & \\
\vdots & \vdots & & \\
\underbrace{v_1^1, \dots, v_1^{n_r},}_{n_r} & \underbrace{v_1^{n_r+1} \dots, v_1^{n_r+n_{r-1}}}_{n_{r-1}} & , \dots, & \underbrace{v_1^{n_r+\cdots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\cdots+n_2+n_1}}_{n_1} \\
\text{Jordanketten} & \text{Jordanketten} & & \text{Jordanketten} \\
\text{der Länge } r & \text{der Länge } r-1 & , \dots, & \text{der Länge } 1
\end{array} \qquad \square$$

Bemerkung 19.3. Die Matrixdarstellung in der Jordanbasis die wir im Satz 19.2 erhalten haben ist

$$A_c := \begin{pmatrix} J_r(c) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & J_r(c) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & J_1(c) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J_1(c) \end{pmatrix} \text{ wobei die Jordanzelle } J_i(c)\ n_i\text{-mal erscheint.}$$

Korollar 19.4.
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Falls Min. Pol. (T) (oder Char. Pol. (T)) zerfällt über K, dann hat V eine Basis von Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwerten. Die Anzahl der Jordanketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis:
Sei Min. Pol. $(T) = (x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k}$.

Satz 18.2 liefert eine Zerlegung:

$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ mit W_i T-invariant und Min. Pol. $T_{W_i} = (x-c_i)^{r_i}$.

Jordan Normalform liefert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$ von Jordanketten für T_{W_i} und jeden c_i.

Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (als geordnete Basis). □

Bemerkung 19.5.
Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, W_i$ T-invariant und $\mathcal{B}_i$ = Basis für $W_i, \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ (als geordnete Basis). Es gilt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

Beweis: s. ÜB.

In B3 werden wir algebraische abgeschlossene Körper kennenlernen. Wenn K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $K = \mathbb{C}$) dann zerfällt jedes Polynom (vom Grad ≥ 1) über K.

Korollar 19.6.
Sei K algebraisch abgeschlossen, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, \ldots c_k$ die Eigenwerte von T sind und A_{c_i} wie in Bemerkung 19.3 beschrieben.

20 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL IV: EUKLIDISCHE UND UNITÄRE RÄUME.

In diesem Kapitel werden wir einen K- Vektorraum V (wobei $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$) betrachten. Wir werden zunächst in Abschnitt 15; Skripte 20 und 21 eine weitere Struktur (inneres Produkt und Norm) auf V definieren und seine Eigenschaften analysieren. Wir werden dabei besondere (orthonormale) Basen für V studieren. Nachdem wir in Abschnitt 16 die Beziehung zum Dualraum V^* (Riesz-Darstellung) und zum Bidualraum V^{**} analysieren, werden wir die transponierte Konjugierte T^* von $T \in \mathcal{L}(V,V)$ einführen. In den Abschnitte 17 bis 20 werden wir dann im Bezug auf T^* besondere Operatoren $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und deren Matrixdarstellungen betrachten. Insbesondere werden wir e.g. Hermite'sche Operatoren sowie Isometrien studieren. In den letzten 3 Abschnitte 21 bis 23 werden wir unser Studium auf normale Operatoren erweitern, und deren Spektraltheorie und Anwendungen einbringen.

§ 15 Innere Produkte

Sei stets $K = \mathbb{R}$, oder $K = \mathbb{C}$, und sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 20.0
Ein *inneres Produkt* (auch *Skalarprodukt*) auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K$$

$$(x, y) \longmapsto (x \mid y),$$

so dass

(1) $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$

(2) $(c_1x_1 + c_2x_2 \mid y) = c_1(x_1 \mid y) + c_2(x_2 \mid y)$

(3) $(x \mid x) \geq 0$ und $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung 20.1.

(1') Da $(x \mid x) = \overline{(x \mid x)}$, ist $(x \mid x) \in \mathbb{R}$.

(2') Wir folgern: $(x \mid c_1y_1 + c_2y_2) = \overline{(c_1y_1 + c_2y_2 \mid x)} = \overline{c_1(y_1 \mid x) + c_2(y_2 \mid x)} =$
$\overline{c_1}\overline{(y_1 \mid x)} + \overline{c_2}\overline{(y_2 \mid x)} = \overline{c_1}(x \mid y_1) + \overline{c_2}(x \mid y_2)$

Notation und Definition:
Wir setzen $(x \mid x) := \|x\|^2$ und nennen $\|x\| := \sqrt{(x \mid x)}$ die *Norm von* x.

Bemerkung 20.2. Es gilt: $\|cx\| = |c| \; \|x\|$.

Terminologie:
• Wenn $K = \mathbb{R}$, heißt V *euklidescher Raum* und das innere Produkt $(\ \mid\ )$ heißt symmetrisch [wegen (1]) bilineare [wegen (2)] positiv definite [wegen (3)] Form.
• Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt V *hermitescher oder unitärer Raum* und das innere Produkt $(\ \mid\ )$ ist hermitesch symmetrisch [wegen (1)] konjugiert bilinear [wegen (2) und (2')] positive definite [wegen (3)] Form.

Beispiel 20.3. Auf $V = K^n$ ist das standard innere Produkt so definiert:
$(x \mid y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \overline{\eta_i}$, für $x = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ und $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in V$.

Definition 20.4.
(i) x, y sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ (äquivalent $(y \mid x) = 0$).

(ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ für alle $x \in W_1$ und für alle $y \in W_2$

(iii) $S \subseteq V$ ist *orthonormal*, falls $(x \mid y) = 0$, wenn $x \neq y$ und $(x \mid y) = 1$, wenn $x = y$. Also $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist orthonormal, falls $(x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$

(iv) S ist *vollständig orthonormal*, falls S orthonormal und maximal (bezüglich Inklusion) für die Eigenschaft "orthonormal" ist.

Bemerkung 20.5.
(i) S ist orthonormal $\Rightarrow$ S ist linear unabhängig.

Beweis: $\sum c_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = (\sum c_i x_i \mid x_j) = \sum c_i (x_i \mid x_j) = c_j$, für alle j.

(ii) $\dim V = n \Rightarrow |S| \leq n$ für S orthonormal.

Definition 20.6.
orthogonal $\dim(V) = max\{|S| \mid S \text{ orthonormal}\}$

Bemerkung 20.7.
orthogonal $\dim(V) \leq \dim(V)$

Notation: Für $S \subseteq V$, setze
$S^\perp := \{x \in V \mid (x \,|\, s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$

Bemerkung 20.8.
(i) $S^\perp$ ist ein Unterraum.

(ii) $S \subseteq (S^\perp)^\perp := S^{\perp\perp}$

(iii) $span(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Beweis: Wir beweisen (i): $0 = (0 \mid y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^\perp$.
Für $x_1, x_2 \in S^\perp; c \in K : (x_1 + cx_2 \mid s) = (x_1 \mid s) + c(x_2 \mid s) = 0 + 0 = 0$.
(ii) und (iii): ÜA.

Definition 20.9.
$W \subseteq V$ ist ein Unterraum. $W^\perp$ ist das *orthogonale Komplement*.

Satz 20.10. (Bessel's Ungleichung)
Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthonormal, $x \in V$. Setze $c_i := (x \mid x_i)$. Es gelten

(*i*) $\sum\limits_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$

(*ii*) $x' := x - \sum c_i x_i$ ist orthogonal zu x_j für alle $(j = 1, \dots, n)$

Beweis:
Wir berechnen: $0 \leq (x' \mid x') = (x - \sum c_i x_i \mid x - \sum c_i x_i) =$
$(x \mid x) - \sum\limits_i c_i (x_i \mid x) - \sum\limits_i \overline{c_i}(x \mid x_i) + \sum\limits_{i,j} c_i \overline{c_j}(x_i \mid x_j) =$
$\|x\|^2 - \sum\limits_i c_i \overline{c_i} - \sum\limits_i \overline{c_i} c_i + \sum\limits_i c_i \overline{c_i} = \|x\|^2 - \sum\limits_i |c_i|^2.$
Damit ist (i) bewiesen.
$(x' \mid x_j) = (x \mid x_j) - \sum\limits_i c_i (x_i \mid x_j) = c_j - c_j = 0$. Damit ist (ii) bewiesen. □

Satz 20.11. (Charakterisierung von Vollständigkeit)
Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthonormal. Folgende sind äquivalent:

(*i*) S ist vollständig.

(*ii*) Aus $(x \mid x_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ folgt $x = 0$.

(*iii*) $span S = V$.

(*iv*) $x = \sum\limits_i (x \mid x_i) x_i$ für alle $x \in V$.

(*v*) $(x \mid y) = \sum\limits_i (x \mid x_i)(x_i \mid y)$ für alle $x, y \in V$.

(*vi*) $\|x\|^2 = \sum\limits_i \mid (x \mid x_i) \mid^2$ für alle $x \in V$.

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$
Beweis via Widerspruch. Sei $x \neq 0$. Setze $x_{n+1} := \frac{x}{\|x\|}$. Dann ist $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ orthonormal.
$\left[(x_{n+1} \mid x_i) = 0 \text{ und } (x_{n+1} \mid x_{n+1}) = \frac{1}{\|x\|^2}(x \mid x) = 1\right]$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Sei $x \in V, x \notin span S$, dann ist $x' = x - \sum (x \mid x_i) x_i \neq 0$ und (Satz 20.10) ist zu jedem x_i orthogonal. Widerspruch.

$(iii) \Rightarrow (iv)$
sei $x \in V; x = \sum c_i x_i$, also $(x \mid x_j) = \sum c_i (x_i \mid x_j) = c_j$.

$(iv) \Rightarrow (v)$
$$\left(\sum_i (x \mid x_i) x_i \;\middle|\; \sum_j (y \mid x_j) x_j\right) = \sum_{i,j} (x \mid x_i)\overline{(y \mid x_j)}(x_i \mid x_j) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid y).$$

$(v) \Rightarrow (vi)$
$(x \mid x) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid x) = \sum_i (x \mid x_i)\overline{(x \mid x_i)} = \sum_i |(x \mid x_i)|^2.$

$(vi) \Rightarrow (i)$
sei $x \notin S$. Wenn $S \cup \{x\}$ orthonormal ist, dann ist
$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid x_i)|^2 = 0 = (x \mid x) \neq 1$. Widerspruch. □

21 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 21 werden wir die Eigenschaften von $(\,|\,)$ und $\|\,\|$ beweisen und das Gram-Schmidt Verfahren kennenlernen. In Abschnitt 16a werden wir mithilfe vom Riesz-Darstellungssatz die Beziehung zu V^* untersuchen.

Sei stets $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum, und $(\,|\,)$ auf $V \times V$ ein inneres (Skalar) Produkt.

Satz 21.1. (Ungleichung von Schwarz.)
Für alle $x, y \in V$ gilt: $|\,(x \mid y)\,| \leq \|x\|\ \|y\|$.

Beweis:
Wenn $y = 0$, dann ist die Ungleichung einfach zu prüfen. Sei also $y \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{y}{\|y\|}$ so dass $\{y_1\}$ orthonormal ist. Bessel Ungleichung Satz 20.10 impliziert nun $|\,(x \mid y_1)\,|^2 \leq \|x\|^2$.
Nun $\frac{1}{\|y\|^2}\left|(x \mid y)\right|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow |\,(x \mid y)\,|^2 \leq \|x\|^2\ \|y\|^2$. □

Definition 21.2. $\delta(x, y) := \|x - y\|$, ist die *Distanz* zwischen x und y.

Proposition 21.3. Für alle $x, y, z \in V$ gilt:

(i) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$

(ii) $\delta(x, y) \geq 0; \delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ ($\triangle$ Ungleichung).

(iv) $\delta(x, y) = \delta(x + z, y + z)$

Beweis:
Wir beweisen nur (iii), die andere Behauptungen werden analog bewiesen.
(iii) (Dreiecksungleichung für Norm und Distanz.)
$\|x + y\|^2 = (x + y \mid x + y) = \|x\|^2 + (x \mid y) + (y \mid x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} + \|y\|^2 =$
$\|x\|^2 + 2Re(x \mid y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,|\,(x \mid y)\,| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. □

Bemerkung 21.4. Ein inneres Produkt definiert also auch eine Norm, d.h. dass die Abbildung $x \longmapsto \|x\|$ erfüllt für alle $x, y \in V$:

(i) $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

(ii) $\|cx\| = |c|\ \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □

Definition 21.5.
Sei S eine Basis, S orthonormal, dann heißt S eine orthonormale Basis.

Satz 21.6. (Gram-Schmidt.)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum versehen mit einem inneren Produkt. Dann hat V eine orthonormale Basis.

Beweis:
Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis. Wir werden eine orthonormale Basis
$$\mathcal{J} = \{y_1, \dots, y_n\}$$
per Induktion bilden.

I. Anfang: $x_1 \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$.

I.A: Seien $y_1, \dots, y_r$ schon definiert, so dass $\{y_1, \dots, y_r\}$ orthonormal und $y_j \in span\{x_1, \dots, x_j\}$ für $j = 1, \dots, r$.

I.S.: Betrachte
$$z := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i y_i, c_i \in K \qquad (*)$$
Berechne $(z \mid y_j) = (x_{r+1} \mid y_j) - c_j$ für $j = 1, \dots, r$. Nun setze $c_j = (x_{r+1} \mid y_j)$. Mit dieser Wahl in $(*)$ ist $(z \mid y_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, r$ und

$$z \in span\{x_{r+1}, y_1, \dots, y_r\} \subseteq span\{x_{r+1}, x_1, \dots, x_r\},$$

$z \neq 0$, da $x_1, \dots, x_{r+1}$ linear unabhängig sind und der Koeffizient in $(*)$ von x_{r+1} ist nicht Null. Nun setze $y_{r+1} := \frac{z}{\|z\|}$. □

Satz 21.7.
Sei W ein Unterraum. Es gilt

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$

(2) $W^{\perp\perp} = W$.

Beweis:
(1) Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine orthonormale Basis für W und $z \in V$. Schreibe
$$W \ni x := \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \text{ wobei } c_i = (z \mid x_i).$$

Bessel liefert: $y := z - x$ ist orthogonal zu x_i und damit zu W, das heißt $y \in W^{\perp}$. Also $z = x + y$, $x \in W, y \in W^{\perp}$. Es gilt ferner, dass $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (weil $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

(2) $z = x + y$. Also $(z \mid x) = \|x\|^2 + (y \mid x) = \|x\|^2$. Analog $(z \mid y) = \|y\|^2$.
Wenn $z \in W^{\perp\perp}$, dann $(z \mid y) = 0 = \|y\|^2$. So $z = x \in W$. □

§ 16a Lineare Funktionale

Satz 21.8. (Riesz-Darstellung)
Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum, versehen mit $(\ |\ )$.
Sei $f \in V^*$. Es existiert genau ein $y \in V$ mit $f(x) = (x \mid y)$ für alle $x \in V$ $(\dagger)$.

Beweis:
Existenz: $f = 0 \Rightarrow y = 0$.
Sei $f \neq 0; W := \ker(f) \subsetneq V; W^\perp \neq \{0\}$.

• Sei $y_0 \neq 0; y_0 \in W^\perp$; OE $\|y_0\| = 1$.

Setze $y := \overline{f(y_0)}y_0$. Beobachte $(y_0 \mid y) = (y_0 \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(y_0 \mid y_0) = f(y_0)$.

Somit ist $(\dagger)$ erfüllt für y_0.

• Für $x = \lambda y_0$ berechnen wir allgemeiner: $f(x) = f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda(y_0 \mid y) = (\lambda y_0 \mid y)$. Also ist $(\dagger)$ erfüllt.

• Für $x \in W : (x \mid y) = (x \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(x \mid y_0) = 0 = f(x)$. Also ist $(\dagger)$ erfüllt.

• Sei nun $x \in V$, schreibe $x = x_0 + \lambda y_0$ mit $\lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)}$ und $x_0 := x - \lambda y_0$.

Berechne $f(x_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)} f(y_0) = 0$, so ist $x_0 \in W$
und $f(x) = f(x_0) + f(\lambda y_0) = (x_0 \mid y) + (\lambda y_0 \mid y) = (x_0 + \lambda y_0 \mid y) = (x \mid y)$. Also ist $(\dagger)$ immer erfüllt.

• Eindeutigkeit:
Seien $y_1, y_2 \in V$ mit $(x \mid y_1) = (x \mid y_2)$ für alle $x \in V$. Dann $(x \mid y_1 - y_2) = 0$ für alle $x \in V$, insbesondere für $x := (y_1 - y_2)$ bekommen wir $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, so $y_1 - y_2 = 0$. □

Satz 21.9.
Die Abbildung $\rho : V^* \longrightarrow V\ ;\ f \longmapsto y$
(i.e. $\rho(f)$ ist eindeutig definiert durch $f(x) = (x \mid \rho(f))$ für alle $x \in V$) erfüllt:

(*i*) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(*ii*) ρ ist surjektiv

(*iii*) ρ ist injektiv, aber Achtung

(*iv*) $\rho(cf) = \bar{c}\rho(f)$ für alle $c \in K$, i.e. ρ ist ein konjugierter Isomorphismus.

Beweis:

(i) ÜA.

(ii) $y \in V$. Betrachte $f(x) := (x \mid y)$. $f \in V^*$ und $\rho(f) = y$.

(iii) $f(x) = (x \mid 0) = 0$ für alle $x \Rightarrow f = 0$.

(iv) $z := \rho(cf); y := \rho(f)$. Zeige: $z = \bar{c}y$, i.e. für alle $x \in V$: $(cf)(x) = (x \mid \bar{c}y)$.
Berechne: $(cf)(x) = cf(x) = c(x \mid y) = (x \mid \bar{c}y)$ □

Folgerungen 21.10 Folgerungen I., II., III. und IV. hierunten sowie Eigenschaften (1), (2) und (3) und (4) werden im Übungsblatt ausgearbeitet.

I. $(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$ definiert ein inneres Produkt auf V^*.

II. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis für V, dann existiert $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis für V mit $(x_i \mid y_i) = \delta_{ij}$ für alle i, j.

III. $W^0 \subseteq W^*$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$, i.e. $\rho(W^0) = W^\perp$.

IV. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Definiere T^* durch $(Tx \mid y) := (x \mid T^* y)$ für alle $x \in V$ (d.h. $T^*(y) = z$, genau dann, wenn für alle $x \in V : (x \mid z) = (Tx \mid y)$).

Es gilt $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$. T^* ist die transponierte (adjungierte) Konjugierte.
Eigenschaft der tranponierten Konjugierten

(1) $(cT)^* = \overline{c}T^*$

(2) Sei $[T]_{\mathcal{X}} := A$ und $\mathcal{Y}$ die Basis wie in II.
Es gilt $[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} := A^*$ (i.e. der ij-te Koeffizient von A^* ist $\overline{a_{ji}}$, wobei a_{ij} der ij-te Koeffizient von A ist).

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A.

22 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Abschnitt 16b werden wir ergänzend noch den Zusammenhang zum LA I Kapitel 3 Abschnitt 6 bemerken. In Abschnitt 17 betrachten wir Hermite'sche Operatoren und in Abscnitt 18 schief Hermite'sche Operatoren. Wir beenden das Skript mit der Zerlegung eines Operators.

§ 16b Beziehung zum Bidual

• Sei V ein endlich dimensionaler K- vektorraum. In LA I Proposition 24.4 haben wir für $y_0 \in V$ eine lineare Abbildung $L_{y_0} : V^* \longrightarrow K$ (d.h. $L_{y_0} \in V^{**}$) folgend definiert: $L_{y_0}(y^*) := y^*(y_0)$ für alle $y^* \in V^*$. $(*)$

In LA I Satz 24.5 haben wir dann bewiesen dass die Abbildung

$$\begin{array}{llll} \lambda : & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & y_0 & \longmapsto & L_{y_0} \end{array}$$

ein Isomorphismus ist.

• Sei $(-|-)$ ein inneres Produkt auf V. In Skript 21, Satz 21.9 haben wir betrachtet:

$$\begin{array}{llll} \delta : & V & \longrightarrow & V^* \\ & y_0 & \longmapsto & y_0^* \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{llll} \gamma : & V^* & \longrightarrow & V^{**} \\ & y_0^* & \longmapsto & y_0^{**} \end{array}$$

wobei $y_0^*(x) := (x \mid y_0)$ für alle $x \in V$ und $y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*)$ für alle $y^* \in V^*$.

• Wir können nun die Abbildung betrachten:

$$V \xrightarrow{\delta} V^* \xrightarrow{\gamma} V^{**}, \quad \gamma \circ \delta : y_0 \longmapsto y_0^{**}.$$

Bemerkung 22.0. Es gilt: $\lambda = \gamma \circ \delta$, d.h. $L_{y_0} = y_0^{**}$, für alle $y_0 \in V$.

Beweis:
Es genügt, zu zeigen, dass y_0^{**} die Gleichung $(*)$ erfüllt. Wir berechnen $y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*) = (y_0 \mid y) = y^*(y_0)$. $\square$

§ 17 Hermite'sche Operatoren

Unser Ansatz ist weiterhin: V endl. dim. inneres Produkt Raum.

Erinnerung:
In Folgerung 21.10 (IV) wurde für $T \in \mathcal{L}(V,V)$, die Abbildung $T^* \in \mathcal{L}(V,V)$ hierdurch für $x, y \in V$ definiert:

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)\,,$$

oder

$$(x \mid Ty) = (T^*x \mid y)\,.$$

Definition 22.1.

(i) $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist *Hermite'sch* (oder selbstadjungiert), falls $T = T^*$, i.e. $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ für alle $x, y \in V$.

(ii) $K = \mathbb{R}$; $T = T^*$; T heißt auch *reell symmetrisch.*

(iii) $K = \mathbb{C}; T = T^*$ heißt auch *komplex Hermite'sch.*

Satz 22.2.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ Hermite'sch. Es gelten $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$ und alle Eigenwerte von T sind reell.

Beweis:
$(Tx \mid x) = (x \mid T(x)) = \overline{(Tx \mid x)}$.
Sei nun $Tx = cx$ mit $x \neq 0$, dann ist
$\underbrace{(Tx \mid x)}_{\in\mathbb{R}} = (cx \mid x) = c\,\underbrace{\|x\|^2}_{\in\mathbb{R}}$. Also $c \in \mathbb{R}$. □

• Matrizendarstellungen von Hermite'schen Operatoren:

Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis. Also ist $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ ist Selbstdual, ÜA). Also impliziert $T = T^*$, dass A *Hermite'sch* ist, wobei

$$A := [T]_{\mathcal{X}} = [T^*]_{\mathcal{Y}} = [T^*]_{\mathcal{X}} = \overline{A^t} := A^*.$$

Das heißt $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (A ist *komplex Hermite'sch*), und im reellen Fall $a_{ij} = a_{ji}$, i.e. $A = A^t$ (A ist *symmetrisch*).

Bemerkung 22.3.
Weitere Eigenschaften von Hermite'schen Operatoren (ÜA):

(i) Umgekehrt sei A Hermite'sch und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis für V mit $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Definiere $T(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i) := A\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}$. Dann ist T Hermite'sch.

(ii) T_1, T_2 sind Hermite'sch $\Rightarrow T_1 + T_2$ ist Hermite'sch.

(*iii*) $T \neq 0$ ist Hermite'sch, $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, dann ist αT Hermite'sch genau dann, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*iv*) T ist invertierbar und Hermite'sch genau dann, wenn T^{-1} Hermite'sch ist.

Satz 22.4.
Seien T_1, T_2 Hermite'sch. Es gilt: T_1T_2 ist Hermite'sch genau dann, wenn $T_1T_2 = T_2T_1$.

Beweis:
$(T_1T_2)^* = T_1T_2 \Leftrightarrow T_2^*T_1^* = T_1T_2 \Leftrightarrow T_2T_1 = T_1T_2$ □

Satz 22.5.

(*i*) Sei T_1 Hermite'sch, dann ist $T_2^*T_1T_2$ Hermite'sch.

(*ii*) Umgekehrt ist $T_2^*T_1T_2$ Hermite'sch und T_2 invertierbar, dann ist T_1 Hermite'sch.

Beweis:

(*i*) $(T_2^*T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*T_2^{**} = T_2^*T_1T_2$

(*ii*) $T_2^*T_1T_2 = (T_2^*T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*T_2$, multipliziert links mit $(T_2^*)^{-1}$ und rechts mit T_2^{-1} ergibt $T_1 = T_1^*$. □

§ 18 Cartesische Zerlegung eines Operators

Definition 22.6.
$T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist *schief Hermite'sch*, falls $T^* = -T$. (Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt es "komplex schief Hermite'sch" und wenn $K = \mathbb{R}$, heißt es "schief symmetrisch".)

Bemerkung 22.7:

- Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$, schreibe $T = T_1 + T_2$, wobei

$$T_1 := \frac{T + T^*}{2} \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{T - T^*}{2}$$

wobei:

$$T_1^* = T_1 \quad \text{und} \quad T_2^* = -T_2.$$

Also ist T_1 Hermite'sch und T_2 ist schief Hermite'sch.

- Wenn $K = \mathbb{C}$, T_2 ist schief Hermite'sch $\Leftrightarrow$ $T_2 = iT_3$ mit T_3 komplex Hermite'sch. Also $T = T_1 + iT_3$.

23 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Abschnitt 19 werden wir Isometrien kennenlernen, und zeigen dass diese lineare Operatoren die Distanz und die Norm erhalten. In Abschnitt 20 untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Isometrien und orthonormalen Basen. In Abschnitt 21 führen wir normale Operatoren ein, und sagen den Spektralsatz aus. Diesen beweisen wir dann in Skript 24.

Sei V ein endlich dimensionaler K - Vektorraum und $(\ |\ )$ ein inneres Produkt.

§ 19 Isometrie

Definition 23.1.
Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$, so dass $U^* = U^{-1}$, dann heißt U eine *Isometrie*.
• Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *orthogonal*.
• Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *unitär*.

Satz 23.2.
Für $U \in \mathcal{L}(V,V)$ sind äquivalent:
(1) $U^*U = UU^* = Id$

(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle x,y (das heißt, U erhält $(\,|\,)$.)

(3) $\|Ux\| = \|x\|$ für alle x (das heißt, U erhält die Norm).

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2):
$(Ux \mid Uy) = (x \mid U^*Uy) = (x \mid y)$ für alle $x,y \in V$

(2) $\Rightarrow$ (3):
(2) anwenden mit $x = y$

(3) $\Rightarrow$ (1):
$(Ux \mid Ux) = (U^*Ux \mid x) = (x \mid x)$. Also $([U^*U - Id]x \mid x) = 0$ für alle $x \in V$. Setze $T := U^*U - Id$, dann ist Hermite'sch (wegen 22.3(ii)). Ferner gilt $(Tx \mid x) = 0$ für alle x. Wir behaupten dass auch $(Tx \mid y) = 0$ für alle x, y $(*)$. Benutze folgende Gleichungen für Hermite'sche Operatoren.
• Für $K = \mathbb{R}$: $2(Tx \mid y) = (T(x+y) \mid x+y) - (T(x-y) \mid x-y)$, und für $K = \mathbb{C}$:
• $4(Tx \mid y) = (T(x+y) \mid x+y) - (T(x-y) \mid x-y) + i\,(T(x+iy) \mid x+iy) - i\,(T(x-iy) \mid x-iy)$.

Insbesondere gilt $(Tx \mid Tx) = 0$ für alle x (nehme $y := T(x)$ in $(*)$), also $T = 0$. □

Bemerkung 23.3.
(i) (3) impliziert, dass U auch die Distanz erhält, das heißt:

(4) $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ für alle $x,y \in V$

(ii) Da Isometrien invertierbar sind und erhalten das innere Produkt, ist die Abbildung $U : (V, (\,|\,)) \xrightarrow{\sim} (V, (\,|\,))$ ein *Automorphismus* des inneren Produkt-Vektorraums $(V, (\,|\,))$.

Satz 23.4.
Eigenwerte von Isometrien haben den absoluten Betrag gleich 1.

Beweis:
Sei $Ux = cx, x \neq 0; c \in \mathbb{C}$.
Es ist $\|Ux\| = \|x\|$ und $\|Ux\| = \|cx\| = |c|\,\|x\|$. Also $|\,c\,| = 1$. □

§ 20 Orthonormal-Basis wechseln

Satz 23.5.
Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine orthonormale Basis und $U \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann is U eine Isometrie genau dann wenn $\mathcal{U}\mathcal{X} := \{Ux_1, \ldots, Ux_n\}$ eine orthonormale Basis ist.

Beweis:
"$\Rightarrow$" $(Ux_i \mid Ux_j) = (x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$. Also ist $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal und $\mathcal{U}\mathcal{X}$ ist eine Basis, weil U invertierbar ist.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal. Es gilt also $(Ux_i \mid Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \mid x_j)$ für alle $1 \leq i,j \leq n$ und damit durch Linearität gilt $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$. □

Matrix-Version:

Definition 23.6. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$.
- Wenn $K = \mathbb{R}$ und $AA^* = A^*A = I_n$, heißt A *orthogonal.*
- Wenn $K = \mathbb{C}$ und $AA^* = A^*A = I_n$, heißt A *unitär.*

Bemerkung 23.7.
(i) Seien U eine Isometrie und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis, dann ist $A := [U]_{\mathcal{X}}$ unitär (bzw. orthogonal).

(ii) Matrix-Version von Satz 23.5:
Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis, dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal genau dann, wenn die Basiswechsel-Matrix unitär ist.

§ 21 Spektral-Theorie

In diesem Kapitel haben wir bisher drei wichtige Klassen von Operatoren studiert:
(a) Hermit'sche $(T^* = T)$
(b) schief Hermite'sche $(T^* = -T)$
(c) unitäre $(T^* = T^{-1})$.

Alle erfüllen die folgende Eigenschaft:

Definition 23.8.
$T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist normal, falls $T^*T = TT^*$ ist.

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen und wollen den Hauptsatz des Kapitels beweisen:

Satz 23.9. Spektralsatz für normale Operatoren.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ normal. Setze $p := Min.Pol.(T)$. Dann ist $p = p_1 \dots p_k$, wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und für alle i ist p_i normiert und irreduzibel (deg $p_i = 1$ oder deg $p_i = 2$).
Für jedes i sei $W_i := \ker p_i(T)$ der T-invariante Unterraum von V. Dann ist W_i orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ (das heißt V ist die orthogonale direkte Summe von $W_1, \cdots, W_k$.)

Für den beweis brauchen wir Hilfslemmata.

Lemma 23.10.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant.

Beweis:
Sei $u \in W^\perp, w \in W$ und berechne $(w \mid T^*u) = (Tw \mid u) = 0$ für alle $w \in W$. Also ist $T^*u \in W^\perp$. □

Fortsetzung in Skript 24.

24 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst einige Hilfslemmata beweisen, so dass wir den Spektralsatz nachweisen können. Damit beenden wir Abschnitt 21. In Abschnitt 22 kommen wir zurück auf die Begriffe von Trigonalisierung und Diagonalisierung. Mithilfe von (|) erhalten wir diesbezüglich stärkere Aussagen als die vom Kapitel III. In Abschnitt 23 untersuchen wir die Eigenwerte von normalen Operatoren, mithilfe vom Spektralsatz.

Sei V ein endlich dimensionaler K - Vektorraum, (|) ein inneres Produkt auf V und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Bemerkung 24.1. Da $T^{**} = T$ (siehe ÜB 11) wenden wir Lemma 23.10 auf T^* an und bekommen: $W \subseteq V$ ist T^*-invariant $\Rightarrow W^\perp$ ist T-invariant.

Lemma 24.2.
Sei T normal, $g(x) \in K[x]$ und $W := \ker g(T)$. Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

Beweis:
Wir zeigen dass W T^*-invariant ist. Da $TT^* = T^*T$ ist es einfach zu prüfen dass auch $g(T)T^* = T^*g(T)$. Sei $u \in W$. Berechne: $g(T)(T^*(u)) = T^*(g(T)(u)) = T^*(0) = 0$. Also auch $T^*(u) \in W$. Bemerkung 24.1 impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant. □

Bemerkung 24.3. Ist g ein Faktor von $p :=$ Min. Pol. (T), dann ist $g(T)$ **nicht** invertierbar. In der Tat, sei $p = gh$ mit $0 < \deg h < \deg p$. Wäre $g(T)$ invertierbar, dann hätten wir
$0 = g(T)^{-1}p(T) = g(T)^{-1}g(T)h(T)$ und damit $h(T) = 0$. Widerspruch zu deg p ist minimal. □

Beweis vom Spektralsatz (Satz 23.9)

- Wir bemerken vorab dass W_i T- invariant ist, für alle $i = 1,\cdots,k$ (s. 16.2(2)).
- Sei $p = p_1 \dots p_k$ die Primfaktorisierung von p (s. Satz 5.15). Wir müssen zeigen dass $p_i \neq p_j$ für alle $i \neq j$ und dass $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Beweis via Induktion nach k. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen an, die Behauptung gilt für $k - 1$.
- Lemma 24.2 impliziert dass $W_1^\perp$ T-invariant ist. Bemerke dass $p_1 =$ Min. Pol. (T_{W_1}) (per Definition von W_1 und Irreduzibilität von p_1). Betrachte $T_{W_1^\perp}$ und bemerke, dass $\ker p_1(T_{W_1^\perp}) = \{0\}$ ($x \in W_1^\perp$ und $x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0$). Also ist $p_1(T_{W_1^\perp})$ invertierbar und damit (wegen 24.3) ist p_1 **kein** Faktor von Min. Pol. $(T_{W_1^\perp}) := P_2$ (i.e. p_1 und P_2 sind teilerfremd). Aus Aufgabe 9.3 folgt aber $p = kgV(p_1, P_2) = p_1P_2$. Also ist $P_2 = p_2 \cdots p_k$. Also $p_1 \neq p_j$ für $j = 2, \dots, k$.
- Nun wollen wir die Induktionsannahme auf $T_{W_1^\perp}$ und P_2 anwenden. Bemerke dass $W_1^\perp$ auch T^*-invariant ist (Lemma 23.10) und deshalb $T^*_{W_1^\perp} = (T_{W_1^\perp})^*$. Da T normal ist, folgt nun dass auch auch $T_{W_1^\perp}$ normal ist. Bemerke auch dass $\ker p_i(T_{W_1}) = \{0\}$, für alle $i = 2,\cdots,k$, da $p_1 =$ Min. Pol. (T_{W_1}) und p_1 und p_i teilerfremd sind (wie im Beweis von 18.3 schreibe $I = p_1(T_{W_1})q_1(T_{W_1}) + p_i(T_{W_1})q_2(T_{W_1}) = p_i(T_{W_1})q_2(T_{W_1})$). Es folgt dass $W_i = \ker p_i(T_{W_1^\perp})$.
- Nun können wir die Induktionsannahme anwenden und bekommen also $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, $i,j = 2,\cdots,k$ und $W_1^\perp = W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$. □

§ 22 Orthonormale Trigonalisierung und Diagonalisierung

Satz 24.4. (Orthonormale Trigonalisierung)
Sei $K = \mathbb{C}$ und V ein endlich dim. inneres Produkt K-Vektorraum; $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann gibt es eine orthonormale Basis $\mathcal{X}$, so dass $[T]_{\mathcal{X}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis:
Induktion nach $n := \dim V$. Sei $c \in \mathbb{C}$ und $x \neq 0$ mit $T^*x = cx$, $W := (span\{x\})^\perp$ und $\dim W = \dim V - 1 = n - 1$.
Lemma 23.10 impliziert: W ist T-invariant, also ist T_W wohldefiniert.
Per Induktionsannahme setze $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ als orthonormale Basis für W, wofür die Matrix-Darstellung von T_W eine obere Dreiecksmatrix ist.
Setze $x_n := x/\|x\|$. Dann ist $\mathcal{X} := \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ die gesuchte Basis. □

Korollar 24.5.
Für jede $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{C}$ gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $U^{-1}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis:
Wähle $\mathcal{X}$ als eine orthonormale Basis und definiere $T(x) = A\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$, wobei $x = \sum \varepsilon_i x_i$ ist, für $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Finde eine orthonormale Basis $\mathcal{J}$ wie in Satz 24.4. Setze $U :=$ Matrix der Basiswechsel. Dann ist $U^{-1} = U^*$ und $U^{-1}AU = B$ die obere Dreiecksmatrix. □

Korollar 24.6.
$K = \mathbb{C}$. Sei T normal. Es gibt eine orthonormale Basis bestehend aus Eigenvektoren von T.

Beweis:
Seien p, p_i und W_i wie im Spektralsatz. Für alle $i = 1, \cdots, k$ ist p_i linear über $\mathbb{C}$, $p_i = (x - c_i)$. Also ist W_i der Eigenraum zum Eigenwert c_i. Wähle nun eine orthonormale Basis $\mathcal{X}_i$ für W_i für alle $i = 1, \ldots, k$ (G-S). Also $\mathcal{X}_i$ besteht aus EigenV. zum EigenW. c_i, für alle $i = 1, \ldots, k$. Also ist $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{X}_k$ die gewünschte Basis. □

Definition 24.7.
$B, A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(*i*) A ist normal, falls $AA^* = A^*A$

(*ii*) A ist unitär äquivalent zu B, falls es eine unitäre $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit $B = U^{-1}AU$ gibt.

Korollar 24.8. (Matrixversion von Korollar 24.6.)
Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, A normal, dann ist A unitär äquivalent zu einer diagonalen Matrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

§ 23 Anwendungen vom Spektralsatz

Korollar 24.9.
$K = \mathbb{C}$, T ist normal. Es gilt: T ist Hermite'sch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$.

Beweis
"$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien alle Eigenwerte reell und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis, bestehend aus EigenV. Also ist

$$D = [T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ mit } d_i \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar, dass D Hermite'sch ist $(D^* = \overline{D^t} = D^t = D)$. Also ist auch T Hermite'sch (siehe Folgerungen 21.10(2)). □

Korollar 24.10.
$K = \mathbb{C}, T$ ist normal. Es gilt: T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben den Absolutbetrag 1.

Beweis
"$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien die Eigenwerte $z_i, \ldots z_n$ und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis bestehend aus EigenV, so dass

$$[T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D.$$

Behauptung: D ist unitär.

Berechne $D^* = \overline{D^t} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} \text{Also } DD^* &= \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1\overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

Also ist auch T unitär (siehe Folgerungen 21.10(2)). □

25 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Script werden wir eine weitere wichtige Ergänzung zum Spektralsatz bringen, und somit Abschnitt 23 und Kapitel IV, und auch diese Vorlesung beenden.

Sei weiterhin V ein endlich dimensionaler K - Vektorraum und $(\ |\ )$ ein inneres Produkt. Wir benutzen hier die Notationen von Satz 23.9.

Wir wollen nun die Aussage vom Spektralsatz im Fall $K = \mathbb{R}$ genauer untersuchen. In diesem Fall sind die p_i entweder linear $p_i = (x - r_i), r_i \in \mathbb{R}$ oder quadratisch irreduzibel, d.h. von der Form $(x-a)^2 + b^2; a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Wir wollen eine feinere Zerlegung von V bekommen, in dem wir die W_i weiter zelegen wenn p_i quadratisch irreduzibel ist.

Beispiel 25.1.
Sei $r > 0$; $\theta \in \mathbb{R}$; $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ (i.e. θ erfüllt $\sin\theta \neq 0$).

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Matrix Darstellung A bzgl. standard orthonormale Basis $\{e_1, e_2\}$:

$$A := r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

A ist normal: $AA^t = A^tA$.

Sei $p =$ Char. Pol. $(T) = \det(xI - A) = (x - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta$.
Setze $a := r\cos\theta$, $b := r\sin\theta$, $b \neq 0$.
Also ist $p = (x-a)^2 + b^2$ irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.
Also ist Min. Pol. $T = p$.

Wir zeigen nun die Umkehrung:

Satz 25.2.
Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal mit Min. Pol. $T := p = (x-a)^2 + b^2, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.
Es gilt: Es existieren 2-dimensionale T-invariante Unterräume $V_1, \ldots, V_s$, so dass

(i) V_i orthogonal zu V_j ist für $i \neq j$.

(ii) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$.

(iii) V_j hat eine orthonormale Basis $\{\alpha_j, \beta_j\}$, so dass $T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$ und $T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j$.
Das heißt $[T_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, wobei $\{\alpha_j, \beta_j\}$ die geordnete orthonormale Basis ist.

(iv) Char. Pol. $(T) = p^s$.

(v) $[T^*_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

(vi) $TT^* = (a^2 + b^2)I$.

Setze $r := \sqrt{a^2+b^2}$, wähle θ mit $a = r\cos\theta$ und $b = r\sin\theta$. Dann ist V also die orthogonale direkte Summe von 2 dimensionalen Unterräumen und die Beschränkung T_{V_i} ist "r-mal eine Drehung um die Winkel θ".

Wir brauchen eine Bemerkung und ein Hilfslemma, bevor wir den Satz beweisen.

Bemerkung 25.3.

(i) Sei $K = \mathbb{R}, U \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt $(U\alpha \mid \beta) = (U^*\beta \mid \alpha)$ für $\alpha, \beta \in V$.

(ii) Sei nun U normal, dann gilt $\|U\alpha\| = \|U^*\alpha\|$ für alle $\alpha \in V$.

Beweis:

(i) $(U^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid U\alpha) = \overline{(U\alpha \mid \beta)} = (U\alpha \mid \beta)$.

(ii) $\|U\alpha\|^2 = (U\alpha \mid U\alpha) = (\alpha \mid U^*U\alpha) =$
$(\alpha \mid UU^*\alpha) = (U^*\alpha \mid U^*\alpha) = \|U^*\alpha\|^2$. □

Hilfslemma 25.4.
Sei $K = \mathbb{R}$ und S normal, so dass $S^2 + I = 0$.
Sei $\alpha \in V$ und setze $\beta := S\alpha$. Es ist $S^*\alpha = -\beta$ und $S^*\beta = \alpha$ (†)
und $(\alpha \mid \beta) = 0$ und $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

Beweis:
$S\alpha = \beta$ und $S\beta = S^2\alpha = -\alpha$. Also
$0 = \|S\alpha - \beta\|^2 + \|S\beta + \alpha\|^2 = \|S\alpha\|^2 - 2(S\alpha \mid \beta) + \|\beta\|^2 + \|S\beta\|^2 + 2(S\beta \mid \alpha) + \|\alpha\|^2$.
Da S normal ist, folgt (Bemerkung 25.3):
$0 = \|S^*\alpha\|^2 - 2(S^*\beta \mid \alpha) + \|\beta\|^2 + \|S^*\beta\|^2 + 2(S^*\alpha \mid \beta) + \|\alpha\|^2 = \|S^*\alpha + \beta\|^2 + \|S^*\beta - \alpha\|^2$. Daraus folgt (†). Berechne nun $(\alpha \mid \beta) = (S^*\beta \mid \beta) = (\beta \mid S\beta) = (\beta \mid -\alpha) = -(\alpha \mid \beta)$. Also $(\alpha \mid \beta) = 0$.
Schließlich $\|\alpha\|^2 = (S^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid S\alpha) = (\beta \mid \beta) = \|\beta\|^2$. □

Beweis vom Satz 25.2
• Sei $\{V_1, \ldots, V_l\}$ eine maximale Menge von 2 dimensionalen Unterräumen mit den Eigenschaften (i), (iii) und (v), das heißt $T^*\alpha_j = a\alpha_j - b\beta_j$ und $T^*\beta_j = b\alpha_j + a\beta_j$ für $1 \le j \le l$.
Setze $W := V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$.

Wir behaupten dass $W = V$ (und $l = s = \frac{n}{2}$).

Sonst ist $W^\perp \neq \{0\}$ und (iii) + (v) implizieren außerdem, dass W, T und T^* invariant ist. Also ist $W^\perp$ T^* und $T^{**} = T$ invariant.
Setze $S := b^{-1}(T - aI)$. Bemerke, dass $S^* = b^{-1}(T^* - aI)$, so $S^*S = SS^*$ (S normal) und $W^\perp$ ist auch S und S^* invariant und $(T-aI)^2 + b^2I = 0$ impliziert $S^2 + I = 0$.
Also können wir Hilfslemma 25.4 für S und $W^\perp$ anwenden.
Wir bekommen

$$\begin{aligned} &\alpha \in W^\perp, && \|\alpha\| = 1 \\ &\beta := S\alpha, && \beta \in W^\perp \text{ und} \\ &S\beta = -\alpha. \end{aligned}$$

Da $T = aI + bS$ haben wir außerdem

$$\left.\begin{aligned} T\alpha &= a\alpha + b\beta \\ T\beta &= -b\alpha + a\beta \end{aligned}\right\} (iii)$$

Darüber hinaus

$$\begin{array}{rcl} S^*\alpha & = & -\beta \\ S^*\beta & = & \alpha \\ (\alpha \mid \beta) & = & 0 \text{ und} \\ \|\beta\| & = & 1. \end{array}$$

Nun ist $T^* = aI + bS^*$. Also

$$\left.\begin{array}{rcl} T^*\alpha & = & a\alpha - b\beta \\ T^*\beta & = & b\alpha + a\beta \end{array}\right\}(v)$$

Widerspruch zur maximalen Wahl von $\{V_1, \ldots, V_l\}$, also $W = V$.

• Wir beweisen nun (iv), wir berechnen: $\det \begin{pmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{pmatrix} = (x-a)^2 + b^2$.

Es folgt aus (i), (ii) und (iii) nun, dass $\det(xI - T) = [(x-a)^2 + b^2]^s$. □

• Wir müssen noch (vi) zeigen, zu zeigen also dass T ist invertierbar und $T^* = (a^2+b^2)T^{-1}$. Aus (iii) und (v) haben wir

$$[T_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$[T^*_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Nun ist aber:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} =$$

$[T^*_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}}[T_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = [T^*T_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = (a^2+b^2)I_2$.

Also $T^*T = (a^2+b^2)I$. □