17 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Wir setzen die Untersuchung der Matrixdarstellung begonnen in Abschnitt 12, Skript 16 fort.

Sei V ein endlich dimensionaler K- Vektroraum.

Lemma 17.1.

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum; $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W, $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine ergänzende Basis für V. Dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W.

(2) Umgekehrt sei $\{\overline{\alpha}_{r+1}, \ldots \overline{\alpha}_n\}$ eine Basis für V/W, dann ist $\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, \ldots \alpha_n\}$ eine Basis für V.

Siehe ÜB.

Satz 17.2.
Sei $W \subseteq V, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und W T-invariant. Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W, ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \,\dot\cup\, \mathcal{B}''$ von V. Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$, $D = [\overline{T}]_{\overline{\mathcal{B}''}}$, und $\overline{\mathcal{B}''} = \{\overline{\alpha}; \alpha \in \mathcal{B}''\}$.

Beweis:
Setze $r := \dim W$; sei $\mathcal{B}' := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$ die geordnete Basen.
Die Aussage über die $r \times r$ matrix B ist bereits in der 16. Vorlesung bewiesen worden.
Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix D. Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j \text{ für } 1 \leq i \leq n \qquad (*)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B \\ r \times r \\ --- \\ \\ \end{matrix} & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \end{array}\right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{|\mathcal{B}'|=r}, \underbrace{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n}_{|\mathcal{B}''|=(n-r)}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \{\underbrace{\overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \overline{\alpha_n}}_{|\mathcal{B}''|=n-r}\}$$

Schreibe

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B & A_{1r+1} & & A_{1n} \\ & \vdots & & \vdots \\ --- & A_{r(r+1)} & & A_{rn} \\ & A_{(r+1)(r+1)} & \cdots & A_{(r+1)n} \\ & \vdots & & \vdots \\ & A_{n(r+1)} & & A_{nn} \end{array} \right)$$

oder für $1 \le i \le n$

$$T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\alpha_j \tag{$**$}$$

und damit ist:

$\overline{T(\alpha_i)} = \sum\limits_{j=r+1}^{n} A_{ji}\overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i})$ für $r+1 \le i \le n$ □

Aus Satz 17.2 (und Aufgabe 8.1 d)) folgt nun:

Korollar 17.3. Char. Pol. T = (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$).

Für eine analogue Aussage über Min. Pol. T siehe ÜB.

Bemerkung 17.4.
Die Aussage im Korollar 17.5 haben wir schon in Skript 15 bewiesen. Hier geben wir einen zweiten Beweis mithilfe von T_W und $\overline{T}$.

Korollar 17.5.
T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis:

"$\Rightarrow$" wie im Beweis vom Satz 15.3.

"$\Leftarrow$" Wir wollen eine Basis $\mathcal{B}$ für V aufbauen, so dass die Matrixdarstellung von T eine Dreieckmatrix ist. Diese Basis bauen wir auf per Induktion nach $\dim V$.

Induktionsanfang: $n = 1$ ist trivial. I. Induktionsannahme: die Aussage gelte für jeden $n-1$-dimensionalen K- Vektroraum.

Induktionsschritt: Sei c_1 irgendein Eigenwert von T und $\alpha_1 \neq 0$ ein Eigenvektor dazu.

Setze $W := \{c\alpha_1; c \in K\}$. Dann ist W T-invariant: für $\alpha \in W$; $\alpha = c\alpha_1$ gilt: $T(c\alpha_1) = cT(\alpha_1) = cc_1\alpha_1 = c_1c\alpha_1 \in W$.

Wir haben $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$ und $T_W \in \mathcal{L}(W, W)$, und wegen Korollar 17.3

$$\text{Char. Pol. } T = (\text{Char. Pol. } T_W)(\text{Char. Pol. } \overline{T}) \tag{$\dagger$}$$

Wir wollen Char. Pol. T_W berechnen. Nun gilt $T_W(\alpha) = c_1\alpha$ für alle $\alpha \in W$.

Also $A_W := [T_W]_{\{\alpha_1\}} = [c_1]$ und $\det(xI - A_W) = \det(x.1 - c_1) = (x - c_1)$.

Also bekommen wir mit (†):

Char. Pol. $T = (x - c_1)$ Char. Pol. $\overline{T}$.

Wir sehen also, dass auch Char. Pol. $\overline{T}$ im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Nun ist $\dim V/W = (n-1)$ (LA I Korollar 27.4). Die Induktionsannahme liefert nun eine Basis $\overline{\beta_2}, \dots, \overline{\beta_n}$ von V/W, wofür die Matrixdarstellung von $\overline{T}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Setze $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ □

Nun betrachten wir die obige Aussage für Min. Pol. (T).

Korollar 17.6.
Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V, V)$. T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis:
Wir zeigen: Char. Pol. (T) zerfällt im Produkt von linearen Faktoren über K genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

"$\Rightarrow$" Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Da lineare Faktoren irreduzibel sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$, dass auch Min. Pol (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist.

"$\Leftarrow$" Sei Min. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - c_i)^{\nu_i}$.
Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Also Char. Pol. (T) = Min. Pol. (T) $q(x)$

mit $q(x) \in K[x]$. Wenn $\deg(q(x)) = 0$ dann ist $q(x) = 1$. Sei also $\deg(q(x)) > 0$ und sei $C \supseteq K$ eine Körpererweiterung so dass $q(x)$ zerfällt als Produkt über C:

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x - d_j).$$

(Die Existenz vom *Zerfällungskörper* C werden wir in der Algebra Vorlesung B3 im nächstem Semester beweisen).

Wegen Satz 14.6 und Satz 15.1 haben Min. Pol (T) und Char. Pol. (T) dieselben Nullstellen in C. Wir behaupten nun, dass d_j bereits in K liegt und $d_j = c_i$ für ein geeignetes i. Dies gilt, weil d_j sonst eine Nullstelle von Char. Pol. (T), also auch von Min. Pol. (T) mit $d_j \in C \backslash K$ (i.e. $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$) wäre.
Dies ist aber unmöglich, da Min. Pol. (T) bereits alle seine Nullstellen in K hat. □