14 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir ein weiteres wichtiges Polynom definieren, und die Beziehung zwischen Minimale Polynom und Charakteristische Polynom untersuchen.

§ 10 Annihilator Ideal

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Proposition 14.1.
Es gelten:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{p \in K[x] \mid p(T) = 0\}$ ist ein Ideal.

(2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$.

Beweis

(1) Es genügt zu bemerken dass $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$ und $(pq)(T) = p(T)q(T)$, für alle $p, q \in K[x]$.

(2) Setze $\dim V = n$. Betrachte die Elemente $I, T, T^2, \dots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V,V)$.
Da $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$, sind diese Elemente notwendig linear abhängig. Also existiert $c_0, \dots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$ und c_i nicht alle gleich Null. Also ist z.B. das Polynom $c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n^2} x^{n^2} \in \mathcal{A}(T)$. □

Definition 14.2.
$\mathcal{A}(T)$ heißt *annihilator Ideal*. Der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das *Minimale Polynom von* T; bezeichnet als Min. Pol. (T).

Bemerkung 14.3.

1. deg (Min. Pol. (T)) $\leq n^2$.

   In skript 15 werden wir eine bessere obere Schranke bekommen!

2. $p :=$ Min. Pol. (T) ist das normierte Polynom vom kleinsten Grad in $\mathcal{A}(T)$. Ist also charakterisiert durch:

   (a) $p \in K[x]$

   (b) $p(T) = 0$

   (c) für alle $q \in K[x] : \deg q < \deg p \Rightarrow q(T) \neq 0$.

Definition 14.4.
Für $A \in Mat_{n\times n}(K)$ sind $\mathcal{A}(A)$ und Min. Pol. (A) analog definiert.

Bemerkung 14.5.

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Für $f \in K[x]$ gilt $[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$ (ÜB).

Für $A = [T]_{\mathcal{B}}$ gilt also: $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$.

(2) Wir halten fest: ähnliche Matrizen das gleiche minimale Polynom.

Satz 14.6.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ (oder $A \in Mat_{n\times n}(K)$). Es gilt: Char. Pol. (T) und Min. Pol. (T) haben (bis auf Vielfachheit) dieselben Nullstellen .

Beweis:
Seien $p := $ Min. Pol. (T) und $c \in K$. Zu zeigen: $p(c) = 0 \Leftrightarrow c$ ist Eigenwert von T.

"$\Rightarrow$" $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x-c)q$; $\deg q < \deg p$. Also ist $q(T) \neq 0$.
Wähle $\beta \in V$ mit $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$.
Es gilt $0 = p(T)(\beta) = (T-cI)q(T)(\beta) = (T-cI)(\alpha)$. Also ist $\alpha \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert c.

"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei $T(\alpha) = c\alpha; \alpha \neq 0, \alpha \in V, c \in K$.
Nun gilt $p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$ (ÜB).
Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$, folgt daraus $p(c) = 0$. □

Proposition 14.7.
Sei T diagonalisierbar. Dann zerfällt Min. Pol. (T) in verschiedene lineare Faktoren.

Beweis:
Sei T diagonalisierbar, $c_1, \ldots, c_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte, setze $p :=$ Min. Pol. (T). Satz 14.6 impliziert dass $\deg p \geq k$ ist.
Betrachte das Polynom $q(x) := (x-c_1)\cdots(x-c_k)$. Es gilt: $(T-c_1I)\cdots(T-c_kI)(\alpha) = 0$ für jeden Eigenvektor α (weil α Eigenvektor zum Eigenwert c_i ist, für ein geeignetes i). Da es eine Basis von Eigenvektoren gibt, ist $q(T) = 0$, also ist $q \in \mathcal{A}(T)$, und damit wegen Bemerkung 14.3 gilt nun $p = q$. □

Wir werden später die Umkehrung von Proposition 14.7 auch beweisen.

Beispiel 14.8. Nun berechnen wir das minimale Polynom für das Beispiel in 12.9 (ii). Wir bezeichnen p als minimales Polynom. Da T nicht diagonalisierbar ist, können wir Proposition 14.7 nicht anwenden, aber Satz 14.6 können wir anwenden.

Da Char. Pol. $(T) = (x-1)(x-2)^2$ ist, hat p die Nullstellen 1 und 2. Wir probieren Polynome der Form

$$(x-1)^k(x-2)^\ell \text{ mit } k \geq 1 \text{ und } \ell \geq 1$$

("prüfen", ob sie T annihilieren).

$(x-1)(x-2)$:

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Also ist deg $(p) \geq 3$. Nun probieren wir

$$(x-1)^2(x-2) \text{ oder } (x-1)(x-2)^2$$

$(A-I)(A-2I)^2 = 0$. Also ist hier Char. Pol. $(T) =$ Min. Pol. (T).

Der Satz von Cayley Hamilton, den wir in Skript 15 beweisen, wird uns helfen weniger "prüfen" zu müssen...