

8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im Abschnitt 7 werden wir den Begriff “*m*-lineare Formen” einführen (eine natürliche Verallgemeinerung vom Begriff “lineare Funktionale”) und in Abschnitt 8 werden wir besondere *m*-lineare Formen studieren. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwendig.

§ 7 Multilineare Formen

Definition 8.1.

Sei K ein Körper und seien U, V K -Vektorräume.

$$\beta : U \times V \longrightarrow K$$

$$(x, y) \longmapsto \beta(x, y)$$

ist eine *bilineare Funktionale* (oder bilineare Form), falls gelten:

$$(1) \beta(c_1x_1 + c_2x_2, y) = c_1\beta(x_1, y) + c_2\beta(x_2, y) \text{ und}$$

$$(2) \beta(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\beta(x, y_1) + d_2\beta(x, y_2)$$

für alle $x, x_1, x_2 \in U$ und $y, y_1, y_2 \in V$ und $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Beispiel 8.2.

$$V \times V^* \longrightarrow K$$

$$(x, f) \longmapsto [x, f], \text{ wobei } [x, f] := f(x).$$

Die definierenden Eigenschaften und Verknüpfungen in V^* liefern

$$(1) [c_1x_1 + c_2x_2, f] = c_1[x_1, f] + c_2[x_2, f] \text{ und}$$

$$(2) [x, d_1f_1 + d_2f_2] = d_1[x, f_1] + d_2[x, f_2].$$

Notation:

$L^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$. Sie ist ein Vektorraum (mit den Verknüpfungen $(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)(x, y) := c_1\beta_1(x, y) + c_2\beta_2(x, y)$ wie üblich).

Definition 8.3.

Seien $m \in \mathbb{N}$ und V_1, \dots, V_m K -Vektorräume. Eine *m*-lineare Funktionale (Form) (oder multilineare Funktionale vom Grad m) auf $V_1 \times \dots \times V_m$ ist eine Abbildung $\mu : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow K$, so dass für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \mu(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \gamma_i, \dots, \alpha_m) \\ c\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m) \\ \mu(\alpha_1, \dots, \gamma_i, \dots, \alpha_m) \end{array} \right\} + \quad \text{für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i; c \in K.$$

Notation:

$L^{(m)}(V_1 \times \dots \times V_m; K) := K$ -Vektorraum der m -linearen Formen.

Bemerkung 8.4.

μ ist multilinear und falls ein i mit $\alpha_i = 0$ existiert, dann gilt $\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m) = 0$.

§ 8 Alternierende multilineare Formen auf K^n

Definition 8.5.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Eine n -lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n\text{-mal}} \longrightarrow K$$

ist *alternierend*, falls $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $z_i = z_j$ und $i \neq j$ existieren, dann gilt $\delta(z_1, \dots, z_n) = 0$ (für $z_1, \dots, z_n \in K^n$).

Konvention:

δ wird auch als Abbildung auf $K^{n \times n} = \text{Mat}_{n \times n}(K)$ aufgefasst, nämlich

$$\delta(A) = \delta(z_1, \dots, z_n), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \text{---} \\ \dots \\ \text{---} \\ z_n \end{pmatrix};$$

i.e. z_i ist die i -te-Zeile der $n \times n$ -Matrix A .

Lemma 8.6.

Sei δ alternierend. Es gilt:

(i) z_1, \dots, z_n sind linear abhängig $\Rightarrow \delta(z_1, \dots, z_n) = 0$

(ii) $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$ (für $i \neq j$).

Beweis (allgemein)

$\delta(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}) = \text{Sign}(\pi)\delta(z_1, \dots, z_n)$ für $\pi \in S_n$

(i) Ohne Einschränkung nehmen wir an $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_{n-1} \in K$.

Wir berechnen:

$$\delta(z_1, \dots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(z_1, \dots, z_{n-1}, z_i) = 0.$$

(ii) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(z_1, \dots, z_i + z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) = \\ &\quad \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) + \\ &\quad \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) = \\ &\quad \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) + \\ &\quad \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) + \\ &\quad \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j, \dots, z_n) + \\ &\quad \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Also:

$$0 = \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) + \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$$

wie behauptet. □

Bemerkung 8.7.

- (1) Falls $\text{Char}(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung: δ erfüllt (ii) impliziert δ alternierend ist:
Man nehme $z_i = z_j$ für $i \neq j$.
Also $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n)$. Als $\text{Char}(K) \neq 2$ gilt für alle $a \in K$: $a = -a \Rightarrow a = 0$.
- (2) $\delta((a, b), (c, d)) := ac + bd$ auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ ist ein Gegenbeispiel.