8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 1: § 6 Elementare Matrizen

Notation:
Sei e eine elementare Zeilenumformung auf eine $m \times n$-Matrix A. Mit $e(A)$ bezeichnet man die $m \times n$-Matrix, die wir nun erhalten.

Untersuchung:
Typ 1: Umtauschen von Zeilen Z_r und Z_s von A:
$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für} \quad i \neq r, i \neq s \\ A_{sj} & \text{für} \quad i = r \\ A_{rj} & \text{für} \quad i = s \end{cases}$$

Typ 2: Multiplizieren Z_r durch Skalar $c \neq 0; c \in K$:
$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für} \quad i \neq r \\ cA_{rj} & \text{für} \quad i = r \end{cases}$$

Typ 3: Ersetzen von Z_r durch $Z_r + cZ_s, c \in K; r \neq s$:
$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für} \quad i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für} \quad i = r \end{cases}$$

Definition 8.1.
Eine $m \times m$-Matrix in der Form $e(I_m)$ ist *elementar.*

Beispiel 8.2.
Die 2×2 elementaren Matrizen über K:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathit{Typ}\ 1$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad \mathit{Typ}\ 2, c \neq 0, c \in K$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathit{Typ}\ 3, c \in K$$

Satz 8.3.
Sei e eine elementare Zeilenumformung und E die elementare Matrix $E := e(I_m)$ und sei A eine $m \times n$-Matrix über K. Es gilt: $e(A) = EA$.

Beweis:
***e* ist vom Typ 1:** $r \neq s$
Die Untersuchung ergibt:

(i) $E_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \neq r, i \neq s$ und
(ii) $E_{rk} = \delta_{sk}$ für $i = r$ und
(iii) $E_{sk} = \delta_{rk}$ für $i = s$

Wir berechnen nun: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}\ A_{kj}$

Fall (i): $i \neq r; i \neq s$

$$\begin{aligned}(EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\ A_{kj} \\ &= \delta_{ii}\ A_{ij} = A_{ij}\end{aligned}$$

Fall (ii): $i = r$

$$\begin{aligned}(EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} E_{rk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk}\ A_{kj} = \delta_{ss}\ A_{sj} = A_{sj}\end{aligned}$$

Fall (iii): $i = s$

$$\begin{aligned}(EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} E_{sk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk}\ A_{kj} = \delta_{rr}\ A_{rj} = A_{rj}\end{aligned}$$

□

***e* ist vom Typ 2:** ÜA.

***e* ist vom Typ 3:** $r \neq s$

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Wir berechnen nun: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}\ A_{kj}$

Fall 1
$i \neq r$

$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}\ A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\ A_{kj} = \delta_{ii}\ A_{ij} = A_{ij}$

Fall 2
$i = r$

$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{rk}\ A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj}$

Hier bekommen wir nur zwei Terme (die möglichwerweise ungleich Null sind) und zwar nur für
• $k = r$ oder • $k = s$.

$k = r \Rightarrow$ Also $k \neq s$; also $c\delta_{sk} = 0$; also $(\delta_{rk} + c\delta_{sk})A_{kj} = (\delta_{rr} + 0)A_{rj} = A_{rj}$.

$k = s \Rightarrow$ Also $k \neq r$; also $\delta_{rk} = 0$; also $(\delta_{rk} + c\delta_{sk})A_{kj} = (0 + c\delta_{ss})A_{sj} = cA_{sj}$.

Insgesamt $\sum_{k=1}^{m} E_{rk}\ A_{kj} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}$. □