15 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beispiel 15.1.
$V = \mathbb{R}^3$; $\quad \mathcal{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$\left.\begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & (1,2,1) \\ \alpha_2 & = & (2,9,0) \\ \alpha_3 & = & (3,3,4) \end{array}\right\} \text{ ist eine Basis, weil } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ invertierbar ist (siehe Korollar 15.6).}$$

Aufgabe: Finde

(*i*) $\alpha \in \mathbb{R}^3$ mit $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

und finde

(*ii*) $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ für $\alpha = (5, -1, 9)$.

Zu *(i)*: $\alpha = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (11, 31, 7)$

Zu *(ii)*: Finde x_1, x_2, x_3 mit $\alpha = \sum_{i=1}^{3} x_i \alpha_i$ d.h.

$(5, -1, 9) = x_1(1,2,1) + x_2(2,9,0) + x_3(3,3,4)$

Löse LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & = & 9 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ für $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ geordenete Basen?

Bemerkung 15.2.
$[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$.

Sei $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\mathcal{B}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$.

Schreibe $\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \alpha_i$, wobei $p_{ij} \in K$ eindeutig sind, $\forall j = 1, \ldots, n$.

D.h. $[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$.

Nun sei $\alpha \in V$ beliebig und $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

Wir wollen nun $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ berechnen.

Also $\alpha = \sum_{j=1}^{n} x'_j \alpha'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (p_{ij}x'_j)\alpha_i$
$= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j)\alpha_i.$ $(*)$

Es folgt aus $(*)$, dass die i-te Koordinate von α bezüglich $\mathcal{B}$ ist:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j \quad 1 \leq i \leq n \qquad (**)$$

Sei P die $n \times n$-Matrix mit ij-tem Koeffizient p_{ij}.
Wir schreiben $(**)$ um: $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} p_{1j}x'_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} p_{nj}x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Ferner aus $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$ folgt, dass das homogene LGS $PX' = 0$ nur die triviale Lösung $X' = 0$ hat. Also ist P invertierbar. Wir bekommen also $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Wir haben bewiesen:

Satz 15.3.
Sei $\dim V = n$ über K, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen wie in Bemerkung 15.2; P die eindeutig definierte invertierbare Matrix mit Spalten $P_j := [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ für $j = 1, \ldots, n$. Es gelten für alle $\alpha \in V$:

(*i*) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(*ii*) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Satz 15.4.
Sei $\dim V = n$ über K, P eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis. Es gibt eine eindeutig definierte (eindeutig bestimmte) geordnete Basis $\mathcal{B}'$ von V, so dass für alle $\alpha \in V$ gelten:

(*i*) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(*ii*) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Beweis
Wenn $\mathcal{B}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ *(i)* erfüllen sollte, dann gilt notwendigerweise insbesondere $\forall j = 1, \ldots, n$:

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = P[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} = P_j$$

Also definiere $\alpha'_j := \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\alpha_i$.

Nun zeigen wir, dass die so definierten α'_j eine Basis bilden [Aus Satz 15.3 (i) und (ii) folgen dann Satz 15.4 (i) und (ii)].

Sei $Q := P^{-1}$. Wir berechnen:

$\sum_j Q_{jk}\alpha'_j = \sum_j Q_{jk} \sum_i p_{ij}\alpha_i = \sum_j \sum_i p_{ij}Q_{jk}\alpha_i = \sum_i \big(\underbrace{\sum_j p_{ij}Q_{jk}}_{(PQ)_{ik}}\big)\ \alpha_i = \sum_i (\delta_{ik})\alpha_i = \alpha_k$ für $1 \leq k \leq n$.

Also $\operatorname{span}(\mathcal{B}') \supseteq \mathcal{B}$. So $\operatorname{span}(\mathcal{B}') = V$. Die Behauptung folgt nun aus Hilfslemma 2. □

(Siehe HL1 und HL2)

$$\text{ÜB} \begin{cases} \textbf{Hilfslemma 1:} & \dim V = n; X \subseteq V; \\ & \mid X \mid = n \text{ und } X \text{ linear unabhängig } \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \\ \textbf{Hilfslemma 2:} & \dim V = n; X \subseteq V; \\ & \mid X \mid = n \text{ und } X \text{ erzeugt } \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \end{cases}$$

Korollar 15.5.
Sei P eine $n \times n$-Matrix über K. Es gilt: P ist invertierbar genau dann, wenn die Spalten von P linear unabhängig in $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ sind.

Beweis
Wegen Satz 9.8 gilt: P ist invertierbar genau dann, wenn das homogene LGS
$P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = PX = 0$ nur die triviale Lösung hat, gdw $\sum_{i=1}^n x_iP_i = 0$ eine triviale lineare Kombination ist (wobei P_i die i-te Spalte von P ist), gdw die Spalten von P linear unabhängig sind.

Korollar 15.6.
Sei $\dim V = n$ und P eine $n \times n$-Matrix. Es gilt: P ist invertierbar genau dann, wenn die Spalten von P eine Basis für V bilden.

Beispiel 15.7.
Sei $K = \mathbb{R}$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Wir beschreiben eine parametrische Familie von geordneten Basen für $\mathbb{R}^2$.
$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit

$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

So gilt für jedes $\theta \in \mathbb{R}$, dass $\mathcal{B}_\theta := \{(\cos\theta, \sin\theta),\ (-\sin\theta, \cos\theta)\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$ ist.

Dann ist $[\alpha]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, die Koordinaten-Spalten-Matrix bezüglich der geordneten Standard-Basis $\mathcal{E} := (e_1, \ldots, e_n)$ (siehe Beispiel 13.4).

Es gilt wegen Satz 15.4 (ii):
$[\alpha]_{\mathcal{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta & + & x_2\sin\theta \\ -x_1\sin\theta & + & x_2\cos\theta \end{pmatrix}$