13 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 13.1.
Sei V endlich dim. Vektorraum über K. Es gilt: Alle Basen haben dieselbe Kardinalität.

Beweis
Seien Basen $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{B}_1 & = & \{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \\ \mathcal{B}_2 & = & \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{erzeugt} \\ \text{linear unabhängig} \end{array} \left\} \begin{array}{l} \text{linear unabhängig} \\ \text{erzeugt} \end{array} \right.$

Satz 12.9 impliziert $n \leq m$ und auch $m \leq n$, also $m = n$ $\square$

Wir können nun eindeutig $\dim V$ definieren.

Definition 13.2.
Sei V endlich dim. K-Vektorraum.
$\dim V := \mid \mathcal{B} \mid \quad \mathcal{B}$ eine Basis für V.

Wir können nun den Satz 12.9 umformulieren.

Korollar 13.3.
Sei V ein endlich dim. Vektorraum; $n := \dim V$.

(a) Jede Teilmenge mit mehr als n Elementen ist linear abhängig. (Eine linear unabhängige Teilmenge hat $\leq n$ Elemente.)

(b) Jede Teilmenge mit weniger als n Elementen ist nicht erzeugend. (Eine erzeugende Teilmenge hat $\geq n$ Elemente.)

Beispiel 13.4.

(a) $V = \{0\}, \quad \mathcal{B} = \emptyset, \quad \dim V = \mid \emptyset \mid = 0$

(b) $\dim K^n = n$, weil die Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ hat $\mid \mathcal{E} \mid = n$.

(c) $K^{m \times n} = \mathrm{Mat}_{m \times n}$ hat die Dimension mn: Die $m \times n$-Matrizen mit einer 1 in der ij-ten Stelle und 0 sonst bilden eine Basis.

Korollar 13.5.

(d) $V = K^{\mathbb{N}} := \{f \mid f : \mathbb{N} \to K\}$ ist **nicht** endlich dim, weil die Elemente
$f_i : \mathbb{N} \to K$
$f_i(n) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{array} \right.$
eine unendliche linear unabhängige Teilmenge definieren, nämlich
$S := \{f_i | i \in \mathbb{N}\}$.
Seien $i_1 < \cdots < i_k$ und $c_1 f_{i_1} + \cdots + c_k f_{i_k} = 0$, so ist
$(c_1 f_{i_1} + \cdots c_k f_{i_k})(i_l) = c_l = 0$, für alle $l = 1, \ldots, k$.

Lemma 13.6.
(Fortsetzung Lemma)
Sei V ein K-Vektorraun. Sei S linear unabhängig in V und $\beta \notin \operatorname{span}(S)$. Dann ist $S \cup \{\beta\}$ linear unabhängig.

Beweis
Seien $c_1, \ldots, c_m, b \in K$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S$ mit $c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m + b\beta = 0$.
Behauptung: $b = 0$, sonst $b\beta = (-c_1)\alpha_1 + \cdots + (-c_m)\alpha_m, b \neq 0$.

Also $\beta = [(-c_i)b^{-1}]\alpha_1 + \cdots + [(-c_m)b^{-1}]\alpha_m \Rightarrow \beta \in \operatorname{span}(S)$ - Widerspruch.

Also $b = 0$.
Also $\sum c_i\alpha_i = 0$ und S ist linear unabhängig $\Rightarrow c_i = 0$, für alle $1 \leq i \leq m$. □

Satz 13.7.
Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Jede linear unabhängige Teilmenge von W ist endlich und ist Teil einer (endlichen) Basis für W.

Beweis
Sei $S \subseteq W$ linear unabhängig und beobachte: $S \subseteq V$ ist linear unabhängig. Also $\mid S \mid \leq \dim V$.
Sei nun $S_0 \subseteq W$ linear unabhängig. Wir setzten S_0 zu einer Basis für W fort wie folgend.
Betrachte $\operatorname{span}(S_0) \subseteq W$. Unterraum.
Falls = dann ist S_0 bereits eine Basis.
Fall $\subsetneq$, sei $\beta_1 \in W; \beta_1 \notin \operatorname{span}(S_0)$. Setze $S_1 := S_0 \cup \{\beta_1\}$ linear unabhängig (Lemma 13.6).
Wiederhole: $S_1 \cup \{\beta_2\} := S_2$ linear unabhängig usw.
In höchstens $\dim V$ vielen Schritten erreichen wir $S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, wofür $\operatorname{span}(S_m) = W$ sein muss!
Ferner S_m linear unabhängig , also S_m Basis für W. □

Korollar 13.8.
Sei W ein **echter** Unterraum vom endlich dim. K-Vektorraum V (i.e. $W \subsetneq V$). Dann ist W endlich dim. und $\dim W < \dim V$.

Beweis
Setze $S_0 = \emptyset$ und setze fort wie im Beweis von Satz. Wir erhalten eine Basis S_m von W; $\operatorname{span}(S_m) = W$ in $m \leq \dim V$ vielen Schritten. Also $m := \dim W \leq \dim V$.
Aber W echt; $\exists \beta \notin W$, i.e. $\beta \notin \operatorname{span}(S_m)$. Also $S_m \cup \{\beta\}$ linear unabhängig; so $m + 1 \leq \dim V$.
Also $m < \dim V$. □

Korollar 13.9. (Basisergänzung)
Sei V endlich dim. Vektorraum über K. Jede linear unabhängige Teilmenge ist Teil einer Basis.

Korollar 13.10.
Seien W_1, W_2 endlich dim. K-Vektorräume. ($W_1 \subseteq V$ und $W_2 \subseteq V$ Unterräume.) Es gilt $W_1 + W_2$ ist endlich dim. und $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$.

Beweis
Satz und Korollare implizieren, dass $W_1 \cap W_2$ eine endliche Basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ hat und es gibt $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ eine Basis für W_1, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ eine Basis für W_2 für geeignete $\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_m}_{\in W_1}, \underbrace{\delta_1, \dots, \delta_n}_{\in W_2}$.

Der Vektorraum $W_1 + W_2$ wird von $\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_m; \delta_1, \dots, \delta_n$ erzeugt.

Behauptung
Diese Vektoren sind linear unabhängig.

Beweis
Seien $x_i, i = 1, \dots, k; y_j, j = 1, \dots, m$ und $z_r, r = 1, \dots, n \in K$
$\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j + \sum z_r\delta_r = 0$ (*).

$\Rightarrow -\sum z_r\delta_r = \sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j$.

Also $\sum z_r\delta_r \in W_1$. Aber auch $\in W_2$ per Definition. Also $\in W_1 \cap W_2$.

Also $\sum z_r\delta_r = \sum c_i\alpha_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_k \in K$.

Aber $\{\alpha_1 \dots, \alpha_k, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow z_r = 0$, für alle $1 \le r \le n$.

Also $\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j = 0$ in $(*)$ und $\{\alpha_1 \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow x_i = 0$ und $y_j = 0$, für alle $1 \le i \le k$ und $1 \le j \le m$.

Also $\dim W_1 + \dim W_2 = (k + m) + (k + n) = k + (m + k + n)$. $\square$