Algebraische Zahlentheorie
Algebra B 4 - Sommersemester 2017
Prof'in Dr. Salma Kuhlmann

4.Vorlesung

8. Mai 2017

Lemma 4.1
Sei M ein R-Modul, $N, V \leq M$ Untermoduln. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(1) $M = N \bigoplus V$

(2) $M = N + V$ und $N \cap V = \{0\}$

(3) Jedes $x \in M$ lässt sich eindeutig schreiben als $x = y + z$ mit $y \in N, z \in V$.

Beweis. ÜA. □

Beispiel 4.1
$G = \mathbb{Z}_4$, $H =< 2 >$ hat kein Komplement im $\mathbb{Z}$-Modul G, weil die einzigen Untermoduln von G $\{0\}, H$ und G sind.

Definition 4.1 (i) Sei $S \subseteq M$. Eine <u>lineare Kombination</u> aus S ist ein $x \in M$, so dass $x = \sum_i r_i x_i$ (endliche Summe) mit $r_i \in R, x_i \in S$.

(ii) $\operatorname{Span}_R(S) := \{x \mid x \text{ lineare Kombination aus } S\} = \sum_{s \in S} Rs$

Lemma 4.2
Sei $N \leq M$. Es gilt:

(1) M endlich erzeugt$\Rightarrow$ M/N endlich erzeugt.

(2) N und M/N endlich erzeugt$\Rightarrow$ M endlich erzeugt.

Beweis. ÜA □

Definition 4.2
$S \subseteq M$ ist <u>linear unabhängig</u>, wenn

$$\underbrace{\sum_{i\ I} r_i x_i}_{\text{endliche Summe}} = 0 \Rightarrow \forall i, r_i = 0$$

für alle $r_i \in R$ uns $x_i \in S$.

Definition 4.3 (i) $x \in M$ ist <u>Torsionselement</u>$\Leftrightarrow \exists r \in R$ kein Nullteiler mit $rx = 0$.

(ii) $M_{\text{tor}} := \{x \in M \mid x \text{ Torsionselement}\}$ ist ein Untermodul (vgl ÜB) von M:
Der <u>Torsionsmodul von M</u>.

(iii) M ist <u>torsionsfrei</u>, wenn $M_{\text{tor}} = \{0\}$.

Bemerkung 4.1
$x \in M_{\text{tor}} \Rightarrow \{x\}$ ist nicht linear unbhängig.

Definition 4.4 (i) $S \subseteq M$ ist eine Basis$\Leftrightarrow$ S ist linear unabhängig und erzeugt M.

Konvention: $S = \varnothing$ ist linear unabhängig und $\text{Span}(\varnothing) = \{0\}$.

(ii) M ist frei, wenn er eine Basis hat.

Bemerkung 4.2 (i) S ist genau dann eine Basis von M, wenn jedes $x \in M$ eine eindeutige Darstellung als lineare Kombination aus S hat.

(ii) Jeder K-Vektorraum hat eine Basis und ist also frei als K-Modul. Betrachte aber:

Beispiel 4.2
$G := \mathbb{Z}_2 =< 1 >$ ist nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul, weil $1 \in G_{\text{tor}}$

Lemma 4.3
Sei R ein Integritätsbereich und $S \subseteq M$ torsionsfrei. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(1) M ist frei mit Basis S

(2) $M = \bigoplus_{x \in S} Rx$

Beweis. ÜA. □

Lemma 4.4
Sei $I \lhd R$, M ein R-Modul. Dann ist

(1) $IM := \{ \underbrace{\sum_j r_j y_j}_{\text{endliche Summe}} \mid r_j \in I, y_j \in M\}$ ein Untermodul von M

(2) M/IM ein R/I-Modul.

Beweis.
$$\begin{array}{ccc} R/I \times M/IM & \to & M/IM \\ (\bar{r}, \bar{x}) & \mapsto & \overline{rx} \end{array}$$
□

Lemma 4.5
Sei M frei mit Basis $\{x_j\}_{j \in J}$ und $I \lhd R$. Dann ist M/IM frei als R/I-Modul mit Basis $\{\overline{x}_j\}_{j \in J}$

Beweis. $\{\overline{x}_j\}$ erzeugt M/IM (ÜA). Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit über R/I.

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{r}_j \bar{x}_j = 0 \Leftrightarrow & \sum_j r_j x_j \in IM \\ \Leftrightarrow & \sum_j r_j x_j = \sum_l t_l y_l \end{aligned}$$

für geeignete $t_l \in I, y_l \in M$. Nun $y_l = \sum_k r_{l,k} x_k$, also schreiben wir $\sum_l t_l y_l$ um und bekommen $\sum_j r_j x_j = \sum_k s_k x_k$ mit $s_k \in I$. Die Eindeutigkeit der Darstellung bezüglich einer Basis impliziert nun $r_j \in I$ für alle j, also $\overline{r}_j = 0$. □

Korollar 4.6
Sei M ein R-Modul und S eine Basis mit $|S| = n \in \mathbb{N}$. Dann haben alle anderen Basen Kardinalität n.

Beweis. OE ist R kein Körper (sonst ist $R = K$ und M ein K-Vektorraum und $\dim_K M = n$ ist eindeutig).
Sei $I \lhd R$ maximal. Sei $S = \{x_j\}$. Dann ist $\{\overline{x}_j\}$ eine R/I-Basis für den K-Vektorraum M/IM, wobei $K = R/I$.
Wenn $\{y_k\}$ eine beliebige Basis von M ist, dann ist ebenso $\{\overline{y}_k\}$ eine R/I-Basis für M/IM. □

Korollar 4.7
M endlich erzeugt und frei$\Rightarrow$ jede Basis ist endlich.

Beweis. Sei $\{x_j\}_j$ endlich und erzeugend. Dann ist $\{\overline{x}_j\}_j$ erzeugend für M/IM als R/I-Vektorraum (I maximales Ideal), also ist M/IM endlich dimensional und damit sind notwendigerweise alle Basen von M endlich. □

Bemerkung 4.3
Wir haben gezeigt: M frei mit $\{x_j\}_{j \in J}$ Basis, dann ist $|J|$ eindeutig definiert.

Definition 4.5
Sei M frei mit Basis $\{x_j\}_{j \in J}$. Wir definieren $\dim_R M := |J|$.

Bemerkung 4.4
Wir haben in Korollar 4.6 gezeigt:
$\dim_R M = \dim_K V$, wobei $K = R/I$ und $V = M/IM$, I ein maximales Ideal von R.

5