Algebraische Zahlentheorie
Algebra B 4 - Sommersemester 2017
Prof'in Dr. Salma Kuhlmann

16.Vorlesung

29 Juni 2017

Kapitel 4: Dedekindringe

Definition 16.1
Ein Ring R ist ein Dedekindring, wenn R ein Integritätsbereich ist und jedes Ideal ein Produkt von Primidealen ist.

Notation (Erinnerung)
$I, J \lhd R$, dann ist
$IJ := \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_j \mid x_i \in I, y_j \in J, n \in \mathbb{N}\} \lhd R$.

Beispiel
1. HIR
2. R Dedekindring und $0 \neq S \subseteq R$ multiplikativ $\Rightarrow S^{-1}R$ Dedekindring.
3. Wir werden zeigen: sei R ein Dedekindring und $K =$ Quot(R), L/K endlich separabel, dann ist $\overline{R}^L$ ein Dedekindring

Definition 16.2
(i) Sei R integer und $K =$ Quot(R). Ein R-Untermodul $B \subseteq K$ heißt gebrochenes Ideal, wenn es $d \in R$ mit $d \neq 0$ gibt, so daß $B \subseteq \frac{1}{d}R$.

(ii) Ideale in R sind auch gebrochene Ideale ($d = 1$), wir nennen sie ganze Ideale.

(iii) Sei $x = \frac{a}{b} \in K$, $a, b \in R, b \neq 0$. Dann ist $B := Rx$ ein gebrochenes Hauptideal.

Bemerkung
(i) B ist ein gebrochenes Ideal $\Leftrightarrow \exists d \neq 0$ in R und $A \lhd R$ so daß $B = (\frac{1}{d})A$.

(ii) Die Idealoperationen $+, ., \cap$ sind auf gebrochenen Idealen wohldefiniert:

$$B \subseteq (\tfrac{1}{d})R, B' \subseteq (\tfrac{1}{d'})R \Rightarrow \begin{cases} B + B' \subseteq (\frac{1}{dd'})R \\ BB' \subseteq (\frac{1}{dd'})R \\ B \cap B' \subseteq (\frac{1}{d})R \end{cases}$$

genauer: $BB' = (\frac{1}{dd'})IJ$ $I, J \lhd R$, wobei $B = (\frac{1}{d})I$ und $B' = (\frac{1}{d'})J$.

Definition 16.3
Das gebrochene Ideal B ist invertierbar, wenn es ein gebrochenes Ideal B' gibt mit
$BB' = R \quad (*)$.

Bemerkung (i) B invertierbar$\Rightarrow \exists! B'$, das $(*)$ erfüllt ($BB' = BB'' = R \Rightarrow B' = B''$). Wir bezeichnen $B' := B^{-1}$.

(ii) Ein gebrochenes Hauptideal $B = xR$ mit $x \in K$ und $x \neq 0$ ist invertierbar mit $B^{-1} = x^{-1}R$.

Notation
Seien B, B' gebrochene Ideale. Setze $(B : B') := \{x \in K \mid xB' \subseteq B\}$

Bemerkung
$(B : B')$ ist ein R-Modul. Wenn $B' \neq \{0\}$, $B \subseteq \frac{1}{d}R$ und $a \in B'(d \neq 0, a \neq 0)$, dann ist $(B : B') \subseteq \frac{1}{da}R$.

Lemma 16.1
Ist A ein invertierbares gebrochenes Ideal, gilt dann $A^{-1} = (R : A)$
(Also: A invertierbar$\Leftrightarrow A.(R : A) = R$)

Beweis. Sei $AA' = R$. Dann ist $A' \subseteq (R : A)$. Andererseits ist $A.(R : A) \subseteq R$. Es folgt $(R : A) = A'A(R : A) \subseteq A'R = A'$ □

Lemma 16.2
Ist jedes ganzes Ideal$\neq 0$ invertierbar, ist dann jedes $\neq 0$ gebrochenes Ideal invertierbar.

Beweis. Sei $B = \frac{1}{d}A$ ein gebrochenes Ideal (mit $A \lhd R, d \in R, d \neq 0$), dann ist $B^{-1} = dA^{-1}$. □

Lemma 16.3
Ein invertierbares gebrochenes Ideal ist ein endlich erzeugter R-Modul.

Beweis. $AA^{-1} = R \Rightarrow \exists\{x_i\} \subseteq A$ und $\{x_i'\} \subseteq A^{-1}$, so daß $\sum x_i x_i' = 1$. Es folgt:
$x \in A \Rightarrow x = 1x = \sum \underbrace{xx_i'}_{\in R} x_i$. □

Definition 16.4
Die (multiplikative) Gruppe $\mathcal{J}$ der invertierbaren ($\neq 0$) gebrochenen Ideale, geteilt durch die Untergruppe der gebrochenen Hauptideale $\mathcal{H}$, heißt die Klassengruppe von R.
Ihre Ordnung heißt die Klassenzahl von R.
$(\mathcal{K}l(R) = \mathcal{J}/\mathcal{H}, |\mathcal{K}l(R)| = h_R)$.

Beispiel 16.1
Sei R ein HIR. Dann ist die Klassengruppe trivial und die Klassenzahl 1.