**19. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)**

**Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller**

**WS 2016/2017: 17. Januar 2017**

Wir werden später zeigen, dass $S_n$ nicht auflösbar ist für $n \geq 5$ (Galois).

**Bemerkung**
Jede abelsche Gruppe ist trivialerweise auflösbar. Betrachte $G \rhd \{1\}$.

Wir wollen nun auflösbare Gruppen charakterisieren.

**Definition 1**

($a$) Für $g, h \in G$ definiere $(g, h) := g^{-1}h^{-1}gh \in G$. $(g, h)$ heißt *Kommutator* von $g$ und $h$.

**Bemerkung 1**

(i) $gh = hg(g, h)$

(ii) $(G, G)$ ist die *Kommutatorgruppe* von $G$ und ist die Untergruppe, die durch $S := \{(g, h); g, h \in G\}$ erzeugt wird.

**Bemerkung 2**

(i) $(g, h) = (h, g)^{-1}$, also ist $< S >= \{S_1 \cdots S_n \mid n \in \mathbb{N};\ S_i \text{ ist ein Kommutator in } G\}$.

(ii) $G$ ist abelsch genau dann, wenn $(G, G) = \{1\}$.

**Notation:** $(G, G) := G'$.

($b$) Wir definieren die iterierte Kommutatoren folgendermaßen: $G'' := (G')'$.
Per Induktion über $k \in \mathbb{N}$: $G^{(k)} := (G^{(k-1)})'$.

Wir werden nun die iterierte Kommutatoren ausnutzen, um unsere Charakterisierung zu geben.

**Proposition 1**
Seien $G, \overline{G}$ Gruppen und $\eta : G \to \overline{G}$ ein Homomorphismus. Es gelten

1. $\eta(g, h) = (\eta(g), \eta(h))$
2. $\eta(G') \subseteq \overline{G}'$
3. Wenn $\eta$ surjektiv ist, gilt ferner: $\eta(G') = \overline{G}'$
4. Insbesondere für einen beliebigen Homomorphismus $\eta$ gilt: $\eta(G') = \eta(G)'$

**Zusatz:** 5. Allgemeiner gilt $\eta(G^{(k)}) = \eta(G)^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$

**Beweis**

1. $\eta(g,h) = \eta(g^{-1}h^{-1}gh) = \eta(g)^{-1}\eta(h)^{-1}\eta(g)\eta(h) = (\eta(g), \eta(h))$.
2. Also aus 1. folgt unmittelbar $\eta(G') \subseteq \overline{G}'$.
3. Wenn $\eta$ surjektiv ist, folgt aus 1. dass jeder Kommutator in $\overline{G}$ liegt in $\eta(G')$. Es folgt also aus Bemerkung 2, dass $\eta(G') \supseteq \overline{G}'$ und damit ist die Gleichheit bewiesen.
4. Klar, da $\eta : G \to \eta(G)$ surjektiv ist.
5. $\eta(G') = \eta(G)'$ ist 4.
   Nun betrachte $\eta : G' \to \overline{G}$ und 4. nochmal angewendet ergibt:
   $$\begin{array}{rrcl} & \eta((G')') & = & \eta(G')' \\ \text{i.e.} & \eta(G'') & = & (\eta(G)')' = \eta(G)'' \end{array}$$
   usw. per Induktion fortsetzen. □

**Proposition 2**

$K \lhd G \Rightarrow K' \lhd G$ (insbesondere: $G' \lhd G$).

**Beweis**

Sei $a \in G$ fest und betrachte $\eta_a : K \to K$, $k \mapsto aka^{-1}$ wohldefiniert (weil $K$ ein Normalteiler) und ein Homomorphismus.
Aus Proposition 1 folgt: $\eta_a(K') \subseteq K'$ für alle $a \in G$, aber das bedeutet $K' \lhd G$. □

Wir haben also $G \rhd G' \rhd G'' \rhd \cdots \rhd G^{(k)} \rhd G^{(k+1)} \rhd \cdots$.
Wir wollen zeigen, dass $G$ auflösbar ist $\Leftrightarrow \exists k \geq 1$ mit $G^{(k)} = \{1\}$.
Dafür brauchen wir:

**Lemma**

Sei $K \lhd G$. Es gilt $G/K$ ist abelsch $\Leftrightarrow K \supseteq G'$. Insbesondere $G/G'$ ist abelsch und $G'$ ist die kleinste normale Untergruppe mit dieser Eigenschaft.

**Beweis**

Aus Bemerkung 2 folgt: $G/K$ ist abelsch $\Leftrightarrow (G/K)' = \{1\} \Leftrightarrow (gK, hK) = 1$ für alle $g, h \in G$.
Aber $(gK, hK) = (gK)^{-1}(hK)^{-1}gKhK = (g^{-1}h^{-1}gh)K = (g,h)K$. Also ist $G/K$ abelsch $\Leftrightarrow (g,h)K = K$ für alle $g, h \in G \Leftrightarrow (g,h) \in K$ für alle $g, h \in G \Leftrightarrow G' \subseteq K$.

**Bemerkung 3**

Wir erhalten $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ ist abelsch für alle $k \in \mathbb{N}$.

**Satz 1**

$G$ ist auflösbar $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $G^{(k)} = 1$.

**Beweis**

In der nächsten Vorlesung.

**Bemwerkung 4**
"$\Leftarrow$" folgt unmittelbar aus Bemerkung 3.

**Bemerkung 5**
Sei $H \leq G$. Es folgt $H^{(l)} \leq G^{(l)}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.