

9 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir Nullstellen von Polynomen und deren Vielfachheit studieren. Insbesondere werden wir in Abschnitt 4 Taylor's Formel lernen und beweisen. TF wird dann eingesetzt, um die Vielfachheit zu bestimmen. Diese Begriffe werden wir u.a. in Kapitel III; Normalformen benötigen.

Korollar 9.1.

Seien $f \in K[x]; c \in K$. Es gilt: $(x - c)$ teilt f genau dann, wenn $f(c) = 0$.

Beweis: Divisionsalgorithmus liefert q, r so dass $f = (x - c)q + r; r = 0$ oder $\deg r < 1$. Also ist r ein Skalarpolynom und $f(c) = r(c) = r$. Insbesondere ist $r = 0$ genau dann, wenn $f(c) = 0$ ist. \square

Definition 9.2.

Seien $f \in K[x]; c \in K$, dann ist c eine *Nullstelle* von f , wenn $f(c) = 0$. Abbreviation: "NS von f in K ". Das heißt, c ist Nullstelle von f genau dann, wenn $(x - c)$ teilt f .

Korollar 9.3.

Sei $f \in K[x]$ mit $\deg f = n$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K .

Beweis Wir beweisen per Induktion nach n .

- Induktionsanfang: Wir prüfen gleich für $n = 0$ (und $n = 1$). Wenn $n = 0$, dann ist $f = c$ ein Skalarpolynom und $c \neq 0$. Dann hat f keine Nullstellen in K . Wenn $n = 1$, dann $\exists a, c \in K, a \neq 0$, s.d. $f = ax + c$. Klar gilt $ax + c = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{-c}{a}$, und damit ist $\frac{-c}{a}$ die eindeutige Nullstelle.

- Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass die Aussage für $n - 1$ gilt.

- Induktionsschritt: Sei a eine Nullstelle von f in K . Dann gibt es $q \in K[x]$ so dass $f = (x - a)q; \deg q = n - 1$.

Sei $b \in K$. Nun ist $f(b) = 0$ genau dann, wenn $b = a$ oder b ist Nullstelle von q in K .

Nach Induktionsannahme hat q höchstens $(n - 1)$ Nullstellen, also hat damit f höchstens n Nullstellen. \square

§ 4 Formale Ableitungen

Notation 9.0.

Sei $f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$. Setze:

$f^{(0)} = f := D^0f$ (Konvention) und

$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1} := D^1f = D(f)$,

$f^{(2)} = f'' = D^2f := D(D(f))$,

$f^{(3)} = D^3(f)$,

usw.

Bemerkung 9.4.

Für $f, g \in K[x]$ und $c \in K$ gilt: $D(f + cg) = D(f) + cD(g)$.

So ist $D: K[x] \rightarrow K[x]$ ein linearer Operator. (Siehe auch ÜB 10; LA I.) Allgemeiner gilt für $n \in \mathbb{N}_0$: D^n ist ein linearer Operator.

Satz 9.5. (Taylor's Formel)

Seien $\text{Char}(K) = 0$; $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in K$, $p \in K[x]$ und $\deg p \leq n$.

Es gilt:
$$p = \sum_{i=0}^n p^{(i)}(a) \frac{1}{i!} (x - a)^i \quad (*)$$

Beweis:

(Die Beweisidee ist wie für LIF.) Sei V der K -Vektorraum der Polynome von $\deg \leq n$ (und das 0 Polynom).

Für alle $i = 0, \dots, n$, definiere $l_i: V \rightarrow K$; $l_i \in V^*$, durch $l_i(p) := p^{(i)}(a)$.

Setze $p_i := \frac{1}{i!} (x - a)^i$. Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe Übungsblatt).

Also sind p_0, \dots, p_n und l_0, \dots, l_n zueinander Dual-Basen von V und V^* .

Also
$$p = \sum_{i=0}^n l_i(p) p_i. \quad \square$$

Bemerkung 9.6.

(1) $1, (x - a), \dots, (x - a)^n$ sind linear unabhängig. Also ist diese lineare Kombination (*) eindeutig.

(2) $\text{Char}(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 9.7.

Sei $f \neq 0$ und $c \in K$ eine Nullstelle von f in K . Die *Vielfachheit* von c ist das größte $\mu \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $(x - c)^\mu$ teilt f .

Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$.

Satz 9.8. (Ableitung Test für Vielfachheit)

Seien $\text{Char}(K) = 0$, $f \neq 0$, $\deg f \leq n$ und $c \in K$ ist eine Nullstelle von f .

Es gilt: c hat die Vielfachheit μ genau dann, wenn

$$f^{(k)}(c) = 0 \text{ bei } 0 \leq k \leq \mu - 1 \text{ und } f^{(\mu)}(c) \neq 0 \quad (\dagger)$$

Beweis

“ \Rightarrow ” $(x - c)^\mu$ teilt f und $(x - c)^{\mu+1}$ teilt f nicht. Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x - c)^\mu g$.

Bemerkung: $\deg g \leq n - \mu$ und $g(c) \neq 0$.

Die Taylor Formel liefert:

$$f = (x - c)^\mu \left[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x - c)^m}{m!} \right]. \text{ Also } f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x - c)^{\mu+m}}{m!}.$$

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x - c)^k$ ($0 \leq k \leq n$) eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$f = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(c) \frac{(x - c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x - c)^{\mu+m}}{m!} =$$

$$g^{(0)}(c) \frac{(x - c)^\mu}{0!} + \dots + g^{(n-\mu)}(c) \frac{(x - c)^n}{(n - \mu)!}. \quad (\dagger\dagger)$$

Also $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0$ für $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$ für $\mu \leq k \leq n$.

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$.

“ \Leftarrow ” (*) und ($\dagger\dagger$) liefern $f = \sum_{k=\mu}^n f^{(k)}(c) \frac{(x - c)^k}{k!}$.

$$\text{Also } f = (x - c)^\mu \underbrace{\left[\frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} + \frac{f^{(\mu+1)}(c)}{(\mu+1)!}(x - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^{n-\mu} \right]}_{:= g}$$

$$g(c) = \frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} \neq 0.$$

Also $f = (x - c)^\mu g$ mit $g(c) \neq 0$.

Wir behaupten nun: $(x - c)^{\mu+1}$ teilt f nicht, sonst hätten wir $h \in K[x]$ mit $f = (x - c)^{\mu+1}h = (x - c)^\mu(x - c)h = (x - c)^\mu g$.

$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow g = (x - c)h$. Also $g(c) = 0$. Ein Widerspruch. \square