8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir beweisen, dass die Algebren $K[x]$ (Polynome) und $K[x]^\sim$ (Polynomfunktionen) isomorph sind, wenn der Körper K unendlich ist. Wir werden für den Beweis die Lagrange Interpolationsformel brauchen. Für den Beweis der LIF werden wir wiederum Dualbasen (LA I Skript 22) benötigen. In Abschnitt 3 setzen wir unsere Untersuchung von $K[x]$ fort. Diese Resultate werden in Kapitel II, und insbesondere in Kapitel III benötigt.

Sei $V := K[x]_{\leq n}$ der K-Vektorraum der Polynome mit deg $\leq n$ (zusammen mit dem 0-Polynom). Wir bemerken: $\dim V = n+1$, weil e.g. $\{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ eine Basis bildet.

Satz 8.0. (Lagrange Interpolation):
Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper, $t_0, t_1, \ldots, t_n$ $\quad n+1$ verschiedene Elemente aus K.
Für $0 \leq i \leq n$ sei $L_i := L_{t_i}; L_i \in V^*$ so definiert: $L_i(f) := f(t_i)$.
Dann ist $\{L_0, \ldots, L_n\}$ eine Basis für V^*.

Beweis:
Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \ldots, P_n\}$ von V zu finden. Solch eine Basis ist bestimmt durch die Gleichungen $L_j(P_i) = \delta_{ij} \qquad 0 \leq i, j \leq n.$ $\hfill (*)$
Wir wollen also $P_0, \ldots, P_n$ konstruieren, die $(*)$ erfüllen.
Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

Prüfen Sie, dass diese tatsächlich $(*)$ erfüllen. (Siehe Übungsblatt). Darüberhinaus gilt fü alle $f \in V : f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i.$ $\square$

Definition 8.1.
Seien $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K. Eine Bijektion $\sim: \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}; \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ist eine *Algebren-Isomorphie*, falls $\widetilde{(c\alpha + d\beta)} = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$ und $\widetilde{(\alpha\beta)} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A},\ c, d \in K$ gelten.

In Definition 7.6 haben wir für ein Polynom $f \in K[x]$ die Polynomfunktion $\tilde{f}$ definiert. Wir beweisen nun:

Satz 8.2.
Sei der Körper K unendlich. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & K[x] & \longrightarrow & K[x]^\sim \\ & f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

eine K-Algebren-Isomorphie.

Beweis
Es ist unmittelbar zu prüfen, dass $\widetilde{f + cg} = \tilde{f} + c\tilde{g}$ und $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$. Die Abbildung ist per Definition surjektiv. Ist sie Injektiv? D.h. $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?
Seien $\deg f = n$ und $t_0, \ldots, t_n$ verschiedene Elemente in K. Seien $P_0, \ldots, P_n$ wie in LIF und schreibe $f = \sum f(t_i) P_i$. Wenn $\tilde{f} = 0$, dann gilt insbesondere für alle $i = 0, \ldots, n$ dass $f(t_i) = 0$. D.h. alle Koeffizienten von f sind Null und somit ist $f = 0$ das Nullpolynom. $\square$

§ 3 Ideale

In Satz 7.1(i) haben wir schon bewiesen, dass $K[x]$ ein Integritätsbereich ist und die Kürzungsregel $f, g, h \in K[x] : f \neq 0$ und $fg = fh \Rightarrow g = h$ (Korollar 7.3) erfüllt.
Wir beweisen nun den Divisionsalgorithmus in $K[x]$. Wir benötigen ein Hilfslemma:

Lemma 8.3.
Seien $f, d \neq 0$ mit $\deg d \leq \deg f$. Es gibt ein $g \in K[x]$, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$.

Beweis:
Schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$.

$$\begin{aligned} f &= a_m x^m && + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i && a_m \neq 0 \\ d &= b_n x^n && + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i && b_n \neq 0 \end{aligned}$$

Betrachte $\dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} \big(b_n x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_i x^i \big) = a_m x^m + \cdots$.
Also ist $f - \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = 0$ oder $\deg \big(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \big) < \deg f$.
Setze also $g := (\frac{a_m}{b_n}) x^{m-n}$. □

Satz 8.4. (Divisionsalgorithmus)
Seien $f, d \in K[x]$; $f, d \neq 0$; $\deg d \leq \deg f$. Dann gibt es $q, r \in K[x]$, so dass

(i) $f = dq + r$ wobei

(ii) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner sind q, r durch (i) und (ii) eindeutig definiert.

Beweis:
Existenz: Sei $f \neq 0$ und $\deg f \geq \deg d$. Lemma 8.3 ergibt, dass ein $g \in K[x]$ existiert, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$.
Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg(f - dg) \geq \deg d$, folgt wieder aus Lemma 8.3, dass ein $h \in K[x]$ existiert, so dass $(f - dg) - dh = 0$ oder $\deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg)$.
Die Fortsetzung ergibt ... $< \deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg) < \deg f$.
Die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit $f = dq + r$.

Eindeutigkeit: Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$ mit $r_1 = 0$ oder $\deg r_1 < \deg d$.
$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow d(q - q_1) \neq 0$ und $\deg(r_1 - r) = \deg d + \deg(q - q_1) \geq \deg d$.
Aber $\deg(r_1 - r) \leq \max\,(\deg r_1, \deg r) < \deg d$ — ein Widerspruch.
So $q - q_1 = 0$ und damit $r_1 - r = 0$.

Definition 8.5.
Seien $f, d \in K[x]; d \neq 0$. Wir sagen *d teilt f* oder *f ist durch d teilbar* oder *f ist ein Vielfaches von d*, wenn der Divisionsalgorithmus $r = 0$ ergibt, d.h. : $f = dq + 0$. In diesem Fall heißt q Quotient.

Diesen Begriff von Teilbarkeit in $K[x]$ werden wir in Skript 9 weiter untersuchen und ausnutzen.