6 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL I: POLYNOMALGEBREN.

In Kapitel I werden wir die Polynomalgebra und ihre Eigenschaften näher kennenlernen. Diese Begriffe und Kenntnisse werden wir in dieser Vorlesung (insbesondere in Kapitel II und III) weiter benötigen.

§ 1 Algebren

Erinnerung 6.0.
Sei K ein Körper. Eine K-*Algebra* $\mathcal{A}$ ist ein K-Vektorraum mit einer Multiplikation von Vektoren:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta,$$

so dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $c \in K$ gilt:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Falls es $1 \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ gilt, dann heißt die Algebra eine *Algebra mit Einheit.*

Falls gilt $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ heißt $\mathcal{A}$ eine *kommutative Algebra.*

Beispiel 6.1.
$\mathcal{A} := M_{n\times n}(K)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit

Beispiel 6.2.
$\mathcal{A} := L(V, V)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit

Beispiel 6.3. (Potenzreihen-Algebra)
Betrachte:
- $K^{\mathbb{N}_0} := \{f; f : \mathbb{N}_0 \to K, f \text{ Abbildung }\}$
- Schreibe $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (f_0, f_1, \dots)$
- Addition punktweise, i.e. $(f + g)_n := f_n + g_n$ $(*)$
- Skalarmultiplikation, auch punktweise : $(cf)_n := cf_n$
- Produkt: $(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $(**)$

Proposition 6.4.
$\mathcal{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit den Verknüpfungen (wie in $(*)$ und $(**)$ erklärt) ist eine kommutative Algebra mit Einheit.

Beweis
• In Lineare Algebra I (Skript 13) haben wir die Axiome der K-Vektorräume für $K^{\mathbb{N}_0}$ bereits bewiesen. Wir berechenen nun:

• kommutatives Produkt: $(gf)_n = \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = (fg)_n$.

• assoziatives Produkt:
$$\begin{aligned}
\big[(fg)h\big]_n &= \sum_{i=0}^{n}(fg)_i h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\Big)h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} h_{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j} = \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{(n-j)-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j (gh)_{n-j} \\
&= \big[f(gh)\big]_n.
\end{aligned}$$
• Zeigen Sie dass $1 := (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ eine Einheit ist. Auch die übrigen Axiome (b) und (c) werden ihnen als ÜA, ÜB überlassen. □

Notation
$x := (0, 1, 0, \ldots)$ $\quad x^0 := 1$ $\quad x^n := x \cdots x$ (n-mal)

Proposition 6.5.
(1) $x^k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (1 ist die k-te Stelle) für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(2) $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ sind linear unabhängig. Also ist $K^{\mathbb{N}_0}$ unendlich dim.

Beweis
Bereits in Linear Algebra I Korollar 13.5 geführt. □

Definition 6.6. und Notation
$\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K.
Sie wird bezeichnet als $\mathcal{A} := K[[x]]$.

Warum Potenzreihen? Formale Schreibweise: $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

§ 2 Die Polynomalgebra

Notation
$K[x] := \operatorname{span}\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Definition 6.7.

1. $f \in K[x]$ heißt *Polynom über K.*
2. Sei nun $f \neq 0$, $f \in K[[x]]$. Es gilt: $f \in K[x]$ genau dann, wenn es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ exisitert mit $f_n \neq 0$ und $f_k = 0$ für alle $k > n$. Wir setzen $\deg f := n$, der *Grad von f* ist n.
3. Wenn $\deg f = n$, dann ist $f = f_0x^0 + f_1x^1 + \cdots + f_nx^n$; $f_n \neq 0$. Die f_i heißen *Koeffizienten von f.*
4. Ein Polynom dergestalt $f = f_0x^0$ ist ein *Skalarpolynom* ($\deg f = 0$ oder $f = 0$).
5. Ein Polynom $f \neq 0$ ist *normiert*, falls $\deg f = n$ und $f_n = 1$.