5 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 0: § 4 Quotientenräume

Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum.

Definition 5.1.
Für alle $\alpha, \beta \in V$ gilt $\alpha \equiv \beta \mod W$ (Kongruenz: α kongruent zu β modulo W), falls $\alpha - \beta \in W$.

Lemma 5.2.
$\equiv \mod W$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Beweis

(1) Reflexiv: $\alpha - \alpha = 0 \in W$

(2) Symmetrisch: $\alpha - \beta \in W \Rightarrow -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha \in W$

(3) Transitiv: Sind $\alpha - \beta \in W$ und $\beta - \gamma \in W$,
so auch $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$. □

Definition 5.3.
Zu $\alpha \in V$ heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in V \mid \alpha \equiv \beta \mod W\}$$

die Restklasse (oder Nebenklasse) von $\alpha \mod W$.
$\{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$ heißen Restklassen von W.

Notation
$V/W := \{[\alpha]_W \mid \alpha \in W\}$.

Bemerkung 5.4.
Offenbar ist $[\alpha]_W = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}$. Wir können daher für $[\alpha]_W$ auch $\alpha + W$ schreiben. Also ist $V/W := \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$.

Definition 5.5.

(1) $[\alpha]_W = \alpha + W$ ist die Nebenklasse von α mod W. Ein $\beta \in [\alpha]_W$ heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse.

(2) $V/W :=$ Menge der Nebenklassen. Versehen mit einer Verknüpfung $+$:

$$(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\alpha_1 + \alpha_2) + W$$

und einer Verknüpfung *Skalarmultiplikation*:

$$c \cdot (\alpha + W) := (c\alpha) + W \text{ für } c \in K.$$

Lemma 5.6.
Diese Verknüpfungen sind wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, i.e.

(a) $\alpha \equiv \alpha'$ mod W und $\beta \equiv \beta'$ mod $W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$ mod W

(b) $\alpha \equiv \alpha'$ mod W und $c \in K \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha'$ mod W.

Beweis

(a) $\alpha - \alpha' \in W$ und $\beta - \beta' \in W \Rightarrow \underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\in W} + \underbrace{(\beta - \beta')}_{\in W} =$
$(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') \in W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$ mod W.

(b) $\alpha - \alpha' \in W \Rightarrow c(\alpha - \alpha') \in W \Rightarrow c\alpha - c\alpha' \in W \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha'$ mod W. □

Lemma 5.7.
V/W mit diesen Verknüpfungen ist ein K-Vektorraum.

Beweis
ÜA: Was ist 0?
$0_{V/W} = 0 + W = W$ ist der Nullvektor in V/W.
Was ist eine additive Inverse?
$(\alpha + W) + \big((-\alpha) + W\big) = 0 + W = W = 0_{V/W}$. □

Notation und Bemerkung 5.8.
$\overline{\alpha} := \alpha + W$. Also

(i) $\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} = \overline{\alpha_1 + \alpha_2}$

(ii) $c\overline{\alpha_1} = \overline{c\alpha_1}$

(iii) $\overline{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$

Satz 5.9.
(Die kanonische Projektion)
$\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$
$\pi_W(\alpha) := \overline{\alpha}$ ist eine surjektive lineare Tranformation mit $\ker(\pi_W) = W$.

Beweis
$\pi_W(c\alpha_1 + \alpha_2) = (c\alpha_1 + c\alpha_2) + W = (c\alpha_1 + W) + (c\alpha_2 + W) = c(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$. Sei $\overline{\alpha} \in V/W$, dann ist $\overline{\alpha} = \pi_W(\alpha)$.
$\alpha \in \ker(\pi_W) \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0_{V/W} \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$. □

Korollar 5.10.
$\dim W + \dim(V/W) = \dim V$.

Beweis
Folgt aus Dimensionssatz, LAI Satz 18.2 □

Satz 5.11.
(Homomorphiesatz)
Seien V, Z zwei K-Vektorräume und $T : V \longrightarrow Z$ linear. Es gilt:
$$V/\ker(T) \simeq R_T.$$

Beweis
Definiere $\overline{T} : V/\ker(T) \twoheadrightarrow R_T$ mit $\overline{T}(\alpha + \ker(T)) = \overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$.

(i) Ist $\overline{T}$ wohldefiniert ? $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'} \Rightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$?
$\alpha - \alpha' \in \ker(T) \Leftrightarrow T(\alpha - \alpha') = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$

(ii) Linear ?
$\overline{T}(\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}) = \overline{T}(\overline{\alpha_1 + \alpha_2}) = T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \overline{T}(\overline{\alpha_1}) + \overline{T}(\overline{\alpha_2})$.
Analog zeigt man: Für $c \in K$ und $\alpha \in V$ ist $\bar{T}(c\bar{\alpha}) = c\bar{T}(\bar{\alpha})$.

(iii) $T(\alpha) \in R_T$. Es ist $\overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$. Also ist $\overline{T}$ surjektiv.

(iv) $\overline{T}$ injektiv ?
$\overline{\alpha} \in \ker(\overline{T}) \Leftrightarrow \overline{T}(\overline{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \ker(T) \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0$. So ist $\overline{T}$ injektiv. □

Korollar 5.12.
Seien W, W' Unterräume von V so dass $V = W \oplus W'$. Es gilt:
$$\frac{W \oplus W'}{W} \simeq W'$$

Beweis
$V = W \oplus W'$ bedeutet für alle $v \in V$, dass genau ein $w \in W$ und genau ein $w' \in W'$ existieren, so dass $v = w + w'$.
Definiere $P_{W'} : V \twoheadrightarrow W'; v \mapsto w'$.

ÜA: Ist $P_{W'}$ linear? Surjektiv?
$v \in \ker(P_{W'}) \Leftrightarrow P_{W'}(v) = 0 \Leftrightarrow w' = 0 \Leftrightarrow v \in W$.
Satz 5.11 $\Rightarrow V/\ker(P_{W'}) \simeq$ Bild $(P_{W'})$. □

Korollar 5.13.
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt:
$$(V/W)^* \simeq W^0$$

Beweis
Sei $\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$. Betrachte $\pi_W^t : (V/W)^* \to V^*$. Setze $T := \pi_W$.
Es folgt aus Satz 4.2 dass: $R_{T^t} = \big(\ker(T)\big)^0 = W^0$. $\ker(T^t) = (R_T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$.
Also ist T^t regulär und surjektiv auf W^0. □

Fragestellung
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Was ist die Beziehung zwischen W^* und V^* ?

Korollar 5.14.
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt:
$$W^* \simeq V^*/W^0$$

Beweis
$Id : W \longrightarrow V$ Identitätsabbildung
$Id^t : V^* \longrightarrow W^*$
Es folgt aus Satz 4.2 dass: $\ker(Id^t) = (R_{Id})^0 = W^0$
$R_{Id^t} = (\ker(Id))^0 = (\{0\})^0 = W^*$. □

Übungsaufgabe
Betrachte die Abbildung $\rho : V^* \longrightarrow W^*; \rho(f) := f/W$ (die Restringierung).
Ist ρ linear? Was ist $\ker(\rho)$? Was ist R_ρ?
Benutze Homomorphiesatz (nach der Berechnung von $\ker(\rho)$ und R_ρ). □