7 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst Polynome als Potenzreihen mit endlichem Support wieder erkennen (also $K[x] \subset K[[x]]$). Wir werden dann diese Beobachtung ausnutzen um zu zeigen, dass K[x] ebenfalls eine kommutative Algebra mit Einheit ist. Danach werden wir Polynome als Funktionen ansehen. Wir untersuchen ganz genau die Beziehung zwischen das Polynom f und die Polynomfunktion $\tilde{f}$.

Bemerkung 7.0. $f \in K[[x]]$ definiere Support $f := \{n \in \mathbb{N}_0; f_n \neq 0\}$

(i) Support $f = \emptyset$ genau dann, wenn $f = 0$

(ii) Support f ist endlich genau dann, wenn $f \in K[x]$

(iii) $f \neq 0$. Support f endlich; es gilt deg $f =$ max Support f.

Satz 7.1.
Seien $f, g \in K[x]$ und $f, g \neq 0$. Es gelten:

(i) $fg \neq 0$

(ii) deg $(fg) =$ deg $f +$ deg g

(iii) fg ist normiert, falls f und g normiert sind

(iv) fg ist skalar $\Leftrightarrow$ f und g skalar sind

(v) Falls $f + g \neq 0$, gilt deg $(f + g) \leq$ max (deg f, deg g)

Beweis:
Sei deg $f := m$ und deg $g := n$. Wir erhalten vorab (aus der Definition des Produktes fg):
$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{r=0}^{s} f_r g_{s-r} \right) x^s$ für $f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i$.
Insbesondere $cx^m dx^n = cdx^{m+n}$ und $fg = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq n} f_i g_j x^{i+j}$.

Behauptung: $(*)$ $\quad (fg)_{m+n} = f_m g_n$ und $(**)$ $\quad (fg)_{m+n+k} = 0$, für $k > 0$.

• Wir berechnen $(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}$.

• Dafür untersuchen wir, welche Beträge ungleich Null sind:
• $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow i \leq m, (f_i \neq 0)$ und $m + n + k - i \leq n$ also $m + k \leq i$.
• Das heißt: $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m + k \leq i \leq m$, i.e. $k = 0$ und $m = i$.
• Somit haben wir die Behauptung bewiesen.

• Nun implizieren $(*)$ und $(**)$ unmittelbar (i), (ii) und (iii).
• Auch (i) und (ii) implizieren (iv).
• (v): ÜA, ÜB. $\square$

Korollar 7.2.
$K[x]$ ist eine kommutative K-Algebra mit Einheit.

Beweis:
$K[x]$ ist ein Unterraum von $K[[x]]$. Es genügt also zu prüfen, dass $K[x]$ unter Produkten abgeschlossen ist, i.e. $f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$. Dieses folgt aus Satz 7.1 Punkt (ii). $\square$

Korollar 7.3.
$f, g, h \in K[x]; f \neq 0$. Aus $fg = fh$ folgt $g = h$.

Beweis:
$K[x]$ ist ein Integritätsbereich (siehe Satz 7.1 Punkt (i)). $\square$

Definition 7.4.
$f : K \longrightarrow K$ ist eine *polynomiale Funktion*, falls es $c_0, \ldots, c_n \in K$ gibt, so dass $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ für alle $x \in K$.

Eine polynomiale Funktion ist etwas anderes als ein Polynom. Wir werden die Beziehung nun genau analysieren. Dafür brauchen wir eine Definition:

Definition 7.5.
Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit; sei $f \in K[x]$; schreibe $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$; $\alpha \in \mathcal{A}$.

Definiere $f(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$ mit $\alpha^0 := 1$.

Beispiel 7.6.
Setze $\mathcal{A} = K$. Ein Polynom $f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale Funktion

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}: & K & \longrightarrow & K; \\ & a & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} f_i a^i \in K. \end{array}$$

Beispiel 7.7.
$\mathcal{A} = M_{2\times 2}(K)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f = x^2 + 2$$

$$f(B) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

Satz 7.8.
Seien $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit, $f, g \in K[x]; \alpha \in \mathcal{A}$ und $c \in K$. Es gelten

(*i*) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(*ii*) $(fg)(\alpha = f(\alpha)g(\alpha)$

Beweis:
Übungsaufgabe

Beispiel 7.9.
Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ fest.

$$\begin{array}{rccc} L_\alpha: & K[x] & \longrightarrow & K \\ & f & \longmapsto & f(\alpha) \end{array} \quad \text{ist eine lineare Funktionale.}$$

Notation
Sei $K[x]^\sim$ der K-Vektorraum der polynomialen Funktionen.

Der Beweis für folgende Proposition ist einfach:

Proposition 7.10.
Sei $K[x]^\sim$ der K-Vektorraum der polynomialen Funktionen. Wir versehen $K[x]^\sim$ mit der punktweisen Multiplikation: $\forall t \in K; (\tilde{f}\tilde{g})(t) := \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)$.
Dann ist $K[x]^\sim$ eine kommutative K-Algebra mit Einheit.

Beispiel 7.11.
Sei $K = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p. Betrachte das Polynom $f = (x^p - x) \in K[x]$. Dann ist $f \neq 0$ (hat Koeffizienten ungleich 0). Es gilt jedoch, dass $\tilde{f} = 0$, i.e. $\tilde{f}$ ist die Nullabbildung.
E.g. $p = 3, f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x]$.

$f \neq 0$, weil $(f)_{n \in \mathbb{N}_0} = (0, 2, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \neq (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in $\mathbb{F}_3$. So ist $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$ die Nullabbildung. Mehr dazu im Übungsblatt.

Wenn aber K unendlich ist, haben wir solche Beispiele nicht! Wir werden dieses in Skript 8 genau untersuchen.