

25 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL IV: EUKLIDISCHE UND UNITÄRE RÄUME.

In diesem Kapitel werden wir einen K -Vektorraum V (wobei $K = \mathbb{R}$, oder \mathbb{C}) betrachten. Wir werden zunächst in Abschnitt 15; Skripte 25 und 26 eine weitere Struktur (inneres Produkt und Norm) auf V definieren und seine Eigenschaften analysieren. Wir werden dabei besondere (orthonormale) Basen für V studieren. Nachdem wir in Abschnitt 16 die Beziehung zum Dualraum V^* (Riesz-Darstellung) und zum Bidualraum V^{**} analysieren, werden wir die transponierte Konjugierte T^* von $T \in \mathcal{L}(V, V)$ einführen. In den Abschnitten 17 bis 20 werden wir dann im Bezug auf T^* besondere Operatoren $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und deren Matrixdarstellungen betrachten. Insbesondere werden wir e.g. Hermite'sche Operatoren sowie Isometrien studieren. In den letzten 3 Abschnitten 21 bis 23 werden wir unser Studium auf normale Operatoren erweitern, und deren Spektraltheorie und Anwendungen einbringen.

§ 15 Innere Produkte

Sei stets $K = \mathbb{R}$, oder $K = \mathbb{C}$, und sei V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum

Definition 25.0.

Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto (x | y), \end{aligned}$$

so dass

- (1) $(x | y) = \overline{(y | x)}$
- (2) $(c_1 x_1 + c_2 x_2 | y) = c_1 (x_1 | y) + c_2 (x_2 | y)$
- (3) $(x | x) \geq 0$ und $(x | x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung 25.1.

(1') Da $(x | x) = \overline{(x | x)}$, ist $(x | x) \in \mathbb{R}$.

(2') Wir folgern: $(x | c_1 y_1 + c_2 y_2) = \overline{(c_1 y_1 + c_2 y_2 | x)} = \overline{c_1 (y_1 | x) + c_2 (y_2 | x)} = \overline{c_1} \overline{(y_1 | x)} + \overline{c_2} \overline{(y_2 | x)} = \overline{c_1} (x | y_1) + \overline{c_2} (x | y_2)$

Notation und Definition:

Wir setzen $(x | x) := \|x\|^2$ und nennen $\|x\| := \sqrt{(x | x)}$ die *Norm von x* .

Bemerkung 25.2.

Es gilt $\|cx\| = |c| \|x\|$.

Terminologie:

- Wenn $K = \mathbb{R}$, heißt V *euklidischer Raum* und das innere Produkt $(|)$ heißt symmetrische [wegen (1)] bilineare [wegen (2)] positiv definite [wegen (3)] Form.
- Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt V *hermitescher* oder *unitärer Raum* und das innere Produkt $(|)$ ist hermitesch symmetrische [wegen (1)], konjugiert bilinear [wegen (2) und (2')] positiv definite [wegen (3)] Form.

Beispiel 25.3.

Auf $V = K^n$ ist das Standard-Innere-Produkt so definiert:

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \bar{\eta}_i, \text{ für } x = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \text{ und } y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in V.$$

Definition 25.4.

- (i) x, y sind *orthogonal*, falls $(x | y) = 0$ (äquivalent $(y | x) = 0$).
- (ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind *orthogonal*, falls $(x | y) = 0$ für alle $x \in W_1$ und für alle $y \in W_2$.
- (iii) $S \subseteq V$ ist *orthonormal*, falls $(x | y) = 0$, wenn $x \neq y$ und $(x | x) = 1$, wenn $x = y$. Also $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist orthonormal, falls $(x_i | x_j) = \delta_{ij}$.

Bemerkung 25.5.

- (i) S ist orthonormal $\Rightarrow S$ ist linear unabhängig.

Beweis: $\sum c_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = (\sum c_i x_i | x_j) = \sum c_i (x_i | x_j) = c_j$, für alle j .

- (ii) $\dim V = n \Rightarrow |S| \leq n$ für S orthonormal.

Definition 25.6.

orthogonal $\dim(V) := \max\{|S| \mid S \text{ orthonormal}\}$

Bemerkung 25.7.

orthogonal $\dim(V) \leq \dim(V)$

Notation: Für $S \subseteq V$, setze

$$S^\perp := \{x \in V \mid (x | s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$$

Bemerkung 25.8.

- (i) S^\perp ist ein Unterraum.
- (ii) $S \subseteq (S^\perp)^\perp := S^{\perp\perp}$
- (iii) $\text{span}(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Beweis:

Wir beweisen (i): $0 = (0 | y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^\perp$.

Für $x_1, x_2 \in S^\perp; c \in K : (x_1 + cx_2 | s) = (x_1 | s) + c(x_2 | s) = 0 + 0 = 0$.

(ii) und (iii): ÜA.

Definition 25.9.

$W \subseteq V$ ist ein Unterraum. W^\perp ist das *orthogonale Komplement*.

Satz 25.10. (Bessel's Ungleichung)

Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthonormal, $x \in V$. Setze $c_i := (x | x_i)$. Es gelten

$$(i) \sum_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$$

$$(ii) x' := x - \sum c_i x_i \text{ ist orthogonal zu } x_j \text{ für alle } (j = 1, \dots, n)$$

Beweis:

Wir berechnen: $0 \leq (x' | x') = (x - \sum c_i x_i | x - \sum c_i x_i) =$

$$(x | x) - \sum_i c_i (x_i | x) - \sum_i \bar{c}_i (x | x_i) + \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j (x_i | x_j) =$$

$$\|x\|^2 - \sum_i c_i \bar{c}_i - \sum_i \bar{c}_i c_i + \sum_i c_i \bar{c}_i = \|x\|^2 - \sum_i |c_i|^2.$$

Damit ist (i) bewiesen.

$$(x' | x_j) = (x | x_j) - \sum_i c_i (x_i | x_j) = c_j - c_j = 0. \text{ Damit ist (ii) bewiesen.}$$

□