24 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript beweisen wir Satz 24.2 und untersuchen seine Folgerungen. Damit beenden wir Kapitel III.

Erinnerung 24.0:
Sei V ein K-Vektorraum und seien $W \subseteq V, W' \subseteq V$ Unterräume. W' ist *Komplement* von W in V, wenn $V = W \oplus W'$.

Bemerkung 24.1.

1. Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $v_1^1, \ldots, v_s^1 \in V$ linear unabhängig, so dass $span\{v_1^1, \ldots, v_s^1\} \cap W = \{0\}$ sind. Dann kann man $\{v_1^1, \ldots, v_s^1\}$ zu einer Basis von einem Komplement von W in V ergänzen.

2. Komplemente existieren und sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Beweis: ÜA

Satz 24.2. (Jordan Normalform).
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sei Min. Pol. $(T) = (x-c)^r$ mit $c \in K$. Dann hat V eine Basis aus Jordanketten zum Eigenwert c (eine Jordanbasis). Die längsten Ketten haben die Länge r, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Beachte, dass

$$\ker(T-cI) \subseteq \ldots \subseteq \ker(T-cI)^r = V.$$

Behauptung:
Seien $j \geq 2$ und $v^1, \ldots, v^s \in \ker(T-cI)^j$ linear unabhängig und $span\{v^1, \ldots, v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1} = \{0\}$.
Dann gelten:

1. $w^1 := (T-cI)v^1, \ldots, w^s := (T-cI)v^s \in \ker(T-cI)^{j-1}$ linear unabhängig und

2. $span\{w^1, \ldots, w^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-2} = \{0\}$.

Beweis der Behauptung:

1. $0 = (T-cI)^j v^i = (T-cI)^{j-1} \underbrace{(T-cI)v^i}_{w^i}$. Also $w^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$.

   Sei nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i, so $\sum_{i=1}^{s} c_i (T-cI)v^i = 0$.

   Also $(T-cI)\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$. Also $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$, weil $(T-cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = (T-cI)^{j-2} \underbrace{(T-cI)(\sum c_i v^i)}_{0} = 0$.

   Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in span\{v^1, \ldots, v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1}$.

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i. Widerspruch, da $\{v_1, \dots, v_s\}$ linear unabhängig sind.

2. Betrachte nun $\sum c_i w^i$, so dass $(T - cI)^{j-2}(\sum c_i w^i) = 0$.
   Dann ist $(T - cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = 0$, also $\sum c_i v^i = 0$ und damit $(T - cI)(\sum c_i v^i) = 0$.
   Also $\sum c_i (T - cI) v^i = 0 = \sum c_i w^i$. □Beh.

Wir bauen nun eine Basis aus Jordanketten.

- $n_r := \dim\ker(T - cI)^r - \dim\ker(T - cI)^{r-1}$ und schreibe $V = V_r \oplus \ker(T - cI)^{r-1}$.
  Sei $\{v_r^1, \dots, v_r^{n_r}\}$ eine Basis für V_r.
  Setze $v_{r-1}^1 := (T - cI)v_r^1, \dots, v_{r-1}^{n_r} := (T - cI)v_r^{n_r} \in \ker(T - cI)^{r-1}$ und ergänze zu einer Basis von einem Komplement V_{r-1} von $\ker(T - cI)^{r-2}$ in $\ker(T - cI)^{r-1}$:
  $\{v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r}, v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\}$.
- Also $n_{r-1} = \dim\ker(T - cI)^{r-1} - \dim\ker(T - cI)^{r-2} - n_r$ und
  $\ker(T - cI)^{r-1} = V_{r-1} \oplus \ker(T - cI)^{r-2}$
- Wir verfahren so weiter für jedes $i = r - 2, \dots, 1$. Dabei berechnen wir immer:

$$n_i = \dim\ker(T - cI)^i - \dim\ker(T - cI)^{i-1} - n_r - \dots - n_{i+1}.$$

- Im letzten Schritt bekommen wir
  $v_1^1 = (T - cI)v_2^1, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2} = (T - cI)v_2^{n_r+\dots+n_2}$, welches wir zu einer Basis von $\ker(T - cI)$ ergänzen:
  $v_1^1, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2}, v_1^{n_r+\dots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}$.
  Insbesondere ist

$$n_1 = \dim\ker(T - cI)^1 - \dim\ker(T - cI)^0 - n_r - \dots - n_2 = \dim\ker(T - cI) - \sum_{i=2}^{r} n_i.$$

- Dies ist die Gestalt der gesamten Jordanbasis für V, die wir erhalten (wobei jede "Spalte" hierunter eine Jordankette ist):

$$\begin{array}{llll}
v_r^1, \dots, v_r^{n_r}, & & & \\
v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r}, & v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}, & & \\
\vdots & \vdots & & \\
\underbrace{v_1^1, \dots, v_1^{n_r},}_{n_r} & \underbrace{v_1^{n_r+1}, \dots, v_1^{n_r+n_{r-1}}}_{n_{r-1}}, & \dots, & \underbrace{v_1^{n_r+\dots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}}_{n_1} \\
\text{Jordanketten} & \text{Jordanketten} & & \text{Jordanketten} \\
\text{der Länge } r & \text{der Länge } r-1 & \dots, & \text{der Länge } 1
\end{array}$$

□

Bemerkung 24.3.
Die Matrixdarstellung in der Joradanbasis, die wir in Satz 24.2 erhalten haben, ist

$$A_c := \begin{pmatrix} J_r(c) & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & J_r(c) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & J_1(c) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_1(c) \end{pmatrix}$$ wobei die Jordanzelle $J_i(c)$ n_i-mal erscheint.

Korollar 24.4.
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Falls Min. Pol. (T) (oder Char. Pol. (T)) über K zerfällt, dann hat V eine Basis von Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwerten. Die Anzahl der Jordanketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis:
Sei Min. Pol. $(T) = (x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$
Satz 23.2 liefert eine Zerlegung:
$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ mit W_i T-invariant und Min. Pol. $T_{W_i} = (x-c_i)^{r_i}$.
Jordan Normalform liefert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$ von Jordanketten für T_{W_i} und jedes c_i.
Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). □

Bemerkung 24.5.
Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, W_i$ T-invariant und $\mathcal{B}_i$ = Basis für $W_i, \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (als geordnete Basis). Es gilt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

Beweis: Siehe ÜB.

In B3 werden wir algebraisch abgeschlossene Körper kennenlernen. Wenn K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $K = \mathbb{C}$), dann zerfällt jedes Polynom (vom Grad ≥ 1) über K.

Korollar 24.6.
Sei K algebraisch abgeschlossen, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, \ldots c_k$ die Eigenwerte von T sind und A_{c_i} wie in Bemerkung 24.3 beschrieben.