23 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 23 und 24 werden wir eine allgemeine Normalform (die Jordan Normalform) kennenlernen und damit Kapitel III beenden. In Abschnitt 13 werden wir zunächst die Zerlegung von V als direkte Summe bzgl. T etablieren. In Abschnitt 14 werden wir Jordanketten und Zellen einführen.

§ 13 Direkte Summen

Lemma 23.1.
Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \ldots, W_k$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(*i*) $W_1, \ldots, W_k$ sind unabhängig, i.e.: Sei $\alpha_i \in W_i$ für $1 \leq i \leq k$ so dass $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$. Dann ist $\alpha_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$.

(*ii*) $W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1}) = \{0\}$ für $2 \leq j \leq k$

(*iii*) Ist $\mathcal{B}_i$ eine Basis für W_i, so ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ eine Basis für $W := W_1 + \cdots + W_k$.

Siehe ÜB.

Notation und Terminologie:
Wir schreiben $V = W_1 + \cdots + W_k$, wenn V nur die Summe der W_i's ist und wir schreiben $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, falls $V = W_1 + \cdots + W_k$ und eine der äquivalenten Bedingungen (i), (ii) und (iii) von Lemma 23.1 gilt. In dem Fall heißt V die *direkte Summe* der W_i's.

Satz 23.2. (Primzerlegung von V bzgl. T)
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Setze Min. Pol. $(T) =: p$. Sei $p = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ die Primfaktorisierung in $K[x]$ von p; wobei p_i verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[x]$ und $r_i \in \mathbb{N}$ sind. Setze $W_i := \ker p_i(T)^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$. Dann ist W_i T-invariant für alle i (s. Skript 21), und darüberhinaus gelten:

(*i*) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ und

(*ii*) Min. Pol. $(T_{W_i}) = p_i^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$.

Hierunter in 23.3 beweisen wir Satz 23.2 für $k = 2$. Der allgemeinere Fall folgt per Induktion nach k.

Proposition 23.3.
Sei $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V,V)$, Min. Pol. $(T) = m = m_1 m_2$ mit $ggT(m_1, m_2) = 1$. Setze $V_i := \ker m_i(T)$ für $i = 1,2$. Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$ und Min. Pol. $(T_{V_i}) = m_i$ für $i = 1,2$.

Beweis:
Da m_1, m_2 relativprim sind, existiert $q_1, q_2 \in K[x]$ mit $1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$.
Also $I = m_1(T)q_1(T) + m_2(T)q_2(T)$ $\quad (*)$

Behauptung 1:
$V_1 = \text{Im } m_2(T)$ und $V_2 = \text{Im } m_1(T)$

Beweis der Behauptung 1:
$0 = m(T) = m_1(T)m_2(T)$, weil $m =$ Min. Pol. (T). Also $\text{Im } m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$.

Umgekehrt sei $v \in \ker m_1(T)$. Mit $(*)$ gilt

$$v = \underbrace{q_1(T)m_1(T)(v)}_{=0} + \underbrace{m_2(T)q_2(T)(v)}_{\in \text{Im } m_2(T)}$$ □

Behauptung 2:
$V = V_1 \oplus V_2$

Beweis der Behauptung 2:

1. Summe: $v \in V$. Mit $(*)$ gilt:
   $$v = \underbrace{m_1(T)q_1(T)v}_{\in \text{Im } m_1(T)} + \underbrace{m_2(T)q_2(T)v}_{\in \text{Im } m_2(T)}$$
2. Direkt: Sei $v \in V_1 \cap V_2$. Mit $(*)$ gilt:
   $$v = \underbrace{q_1(T)m_1(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_1} + \underbrace{q_2(T)m_2(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_2}$$

□

Sei nun $\widetilde{m}_i =$ Min. Pol. (T_{V_i}) für $i = 1,2$. Da $V_i = \ker m_i(T)$, ist es klar, dass $m_i(T_{V_i}) = 0$ für $i = 1,2$.

Also $\quad \widetilde{m}_1 \mid m_1$ $\quad (**)$
und $\quad \widetilde{m}_2 \mid m_2$.

Behauptung 3:
$\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2$ annihiliert T.

Beweis der Behauptung 3:
Berechne für $v_2 \in V_2$ und $v_1 \in V_1$

$\widetilde{m}_1(T)\widetilde{m}_2(T)(v_2 + v_1) = \widetilde{m}_1(T)[\widetilde{m}_2(T)(v_2) + \widetilde{m}_2(T)(v_1)]$
$= \widetilde{m}_1(T)[0 + \widetilde{m}_2(T)(v_1)] = 0$, da $\widetilde{m}_2(T)(v_1) \in V_1$
(weil V_1 $\widetilde{m}_2(T)$-invariant ist, siehe Skript 21; Beispiel 21.2 (2)). □

• Da $\widetilde{m}_2 \widetilde{m}_1$ T annihiliert folgt
$m_1 m_2 = m \mid \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2$ $\quad (***)$

Da m_1, m_2 normiert sind, folgt nun aus $(**)$ und $(***)$, dass $\widetilde{m}_i = m_i$ für $i = 1,2$. □

Sonderfall vom Satz 23.2
Sei p_i linear und $r_i = 1$ für alle i. Dann ist $p = (x - c_1)\cdots(x - c_k)$ mit $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$.

In diesem Fall ist $W_i = \ker(T - c_i I)$ = der Eigenraum zum Eigenwert c_i. Der Satz ergibt: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Also hat V eine Basis aus Eigenvektoren (Lemma 23.1) und damit ist T diagonalisierbar. Wir haben damit die Umkehrung (von Proposition 19.7) gezeigt. Wir haben nämlich bewiesen:

Satz 23.4. (Diag. Kriterium für Min. Pol.)
T is diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Min. Pol. (T) zerfällt in verschiedene lineare Faktoren über $K[x]$.

§ 14 Jordanketten

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

Definition 23.5.
Sei c ein Eigenwert und $0 \neq v_1 \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert c. Seien $\ell \in \mathbb{N}$ und $v_2, \ldots, v_\ell \in V$. Das Vektortupel $(v_1, \ldots, v_r)$ ist eine *Jordankette der Länge ℓ zum Eigenwert c*, falls

$$\begin{array}{rcll} (T - cI)(v_i) & = & v_{i-1} & i = 2, \ldots, \ell \\ (T - cI)(v_i) & = & 0 & \text{für } i = 1. \end{array}$$

Lemma 23.6.
Sei $\mathcal{B}' := (v_1, \ldots, v_r)$ eine Jordankette.
Dann ist $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linear unabhängig und $W = span\{v_1, \ldots, v_r\}$ T-invariant. Die Matrixdarstellung von T_W bzgl. $\mathcal{B}'$ ist die *Jordanzelle $J_\ell(c)$ der Dimension ℓ zum Eigenwert c*, das heißt:

$$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow J_\ell(c) := \begin{array}{c}\text{Jordanzelle der Dimension} \\ \ell \text{ zum Eigenwert } c. \end{array}$$

(Siehe ÜB).