21 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In den Skripten 21 und 22 werden wir T-invariante Unterräume sowie die Matrixdarstellung von T diesbezüglich studieren. Wir schließen Skript 21 mit einer Erinnerung an Skript 5.

§ 12 Invariante Unterräume

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 21.1.
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann ist W *T-invariant*, falls $T(W) \subseteq W$.

Beispiel 21.2.

(0) $\{0\}$ und V sind T-invariant für alle T.

(1) Sei D der Ableitungsoperator auf $V = K[x]$ und $W := K[x]_{\leq d} = \{f\ ;\ f = 0 \text{ oder } \deg f \leq d\}$. Dann ist W D-invariant.

(2) Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $TU = UT$, setze
   (a) $W := \text{Im }(U)$
   (b) $N := \ker(U)$.

   Dann sind W und N T-invariant.

   Beweis

   (a) Sei $\alpha \in \text{Im }(U)$, $\alpha = U(\beta)$; $T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \text{Im }(U)$
   (b) $\alpha \in N; U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0 \Rightarrow T(\alpha) \in N$

(3) $W \subseteq V$ ist T-invariant $\Rightarrow$ W ist $g(T)$-invariant für alle $g \in K[x]$ (ÜB).

(4) Für alle $g \in K[x]$ gilt $g(T)T = Tg(T)$ (ÜA). Insbesondere gilt dies für $g(T) := cI - T$. Wegen (2) ist also $\ker(T - cI)$ T-invariant; i.e. der Eigenraum W_c zum Eigenwert c ist T-invariant.

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

   Setze $T := T_A$. Wir behaupten, dass nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ T-invariant sind:
   Sei $W \neq V, W \neq \{0\}$ T-invariant. Daraus folgt aber, dass $\dim W = 1$. Sei $\alpha \neq 0, \alpha \in W; \{\alpha\}$ ist eine Basis und damit ein Eigenvektor (weil $T(\alpha) \in T$, also $T(\alpha) = c\alpha$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$). A hat aber keine reellen Eigenwerte.

• **Der Operator T_W:**
Sei W T-invariant, setze $T_w := T\restriction_W$. Dann ist $T_W \in \mathcal{L}(W,W)$ (ÜA).

Matrix-Darstellung von T_W:
Sei $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum mit $\dim W = r$.
Sei $\mathcal{B}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ eine Basis für W. Ergänze $\mathcal{B}'$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$ für V.
Betrachte $A := [T]_{\mathcal{B}}$. Wir haben die Gleichungen

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i$$

W ist T-invariant $\Rightarrow T\alpha_j \in W$ für $j \le r$. Also $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{ij}\alpha_i$ für $j \le r$, das heißt $A_{ij} = 0$ für $j \le r$ und $i > r$. Also sieht A wie folgt aus:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r, C$ $r \times (n-r)$ und D $(n-r) \times (n-r)$ sind. Es ist darüber hinaus klar, dass $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 21.3.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant. Es gelten:

(i) Char. Pol. (T_W) teilt Char. Pol. (T).

(ii) Min. Pol. (T_W) teilt Min. Pol. (T).

Beweis

(i) Ist klar, weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

und somit ist $\det(xI - A) = \det(xI - B)\det(xI - D)$, wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

(ii) Beachte, dass

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{pmatrix}$$

wobei gilt: C_k ist $r \times (n-r)$. Also annihiliert jedes Polynom, das A annihiliert, damit auch B. Also Min. Pol. (B) teilt Min. Pol. (A). □

Wir werden in der nächsten Vorlesung die Matrix D genauer untersuchen.

Erinnerung (Quotientenraum und direkte Summen aus Skript 5):

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. $V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ mit $c(\alpha + W) = c\alpha + W$ für ein $c \in K$ und $(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta + W)$ für $\alpha, \beta \in V$.
Bezeichnung: $\alpha + W = \overline{\alpha}$.

(2) **Kanonischer Homomorphismus**
$\pi: V \twoheadrightarrow V/W$
$\pi(\alpha) := \alpha + W$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W$.

(3) **Isomorphiesatz**
Sei $\varphi: V \to U$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen. Es gilt: $V/\ker\varphi \simeq \operatorname{Im} \varphi$.

(4) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Man schreibt $V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe), falls $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Das heißt für alle $\alpha \in V$ existiert genau ein $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, so dass $\alpha = w_1 + w_2$.
Projektions-Homomorphismus
$\pi: W_1 \oplus W_2 \twoheadrightarrow W_2; \pi(w_1 + w_2) := w_2$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$. Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

(5) Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant. Die Abbildung

$$\overline{T}: V/W \to V/W$$

wird so definiert:

$$\overline{T}(\overline{\alpha}) = \overline{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}.$$

Sie ist wohldefiniert, i.e. $\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$, weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$. Sie ist auch linear, i.e. $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$.