18 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir das Charakteristische Polynom weiter analysieren, und in Satz 18.3 ein wichtiges Kriterium für die Diagonalisierbarkeit folgern.

Bemerkung 18.0.
$\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1, \ldots, d_n$ sind verschiedene Eigenwerte, α_i ist Eigenvektor zum Eigenwert d_i. Setze $\mathcal{D} := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ eine Basis und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

eine diagonale Matrix.

Korollar 18.1.
Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1, \ldots, d_k$ verschiedene Eigenwerte. Für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ sei $\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i}$ linear unabhängig. Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ auch linear unabhängig.

Beweis:
Sei $L := \{v_1, \ldots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}$. Betrachte eine lineare Kombination $\sum\limits_{j=1}^{\ell} c_j v_j$. Nun setze $L_i := L \cap \mathcal{B}_i$ und setze $\alpha_i := \sum\limits_{v_j \in L_i} c_j v_j$ $(*)$
falls $L_i \neq \varnothing$ (und $\alpha_i := 0$ per Konvention, falls $L_i = \varnothing$). Dann ist $\alpha_i \in W_{d_i}$.
Also ist $0 = \sum\limits_{j=1}^{\ell} c_j v_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$ nur möglich, wenn $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$.
(Da sonst die $\alpha_i \neq 0$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten **und** gleichzeitig linear abhängig wären. Widerspruch zu Lemma 17.10!)
Nun sind die v_j in $(*)$ linear unabhängig. Also $c_j = 0$ für alle j wie behauptet. □

Lemma 18.2.
Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1, \ldots, d_k$ die verschiedenen Eigenwerte von T. Es gilt: T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.

Beweis:
"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von Eigenvektoren. Setze $\mathcal{B}_j := \mathcal{B} \cap W_{d_j}$.

Also ist $\mathcal{B} = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{k}} \mathcal{B}_j$.

Setze $\ell_j := |\mathcal{B}_j|$. Also ist $n = |\mathcal{B}| = \sum\limits_{j=1}^{k} \ell_j$.

Behauptung:
$\ell_j = \dim W_{d_j}$.
Es ist klar, dass $\ell_j \leq \dim W_{d_j}$. Ist $\ell_i < \dim W_{d_i}$, dann existiert ein $\beta \in W_{d_i}$ mit $\mathcal{B}_i' := \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$ linear unabhängig. Aber dann ist

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\beta\} = \dot{\bigcup_{j \neq i}} \mathcal{B}_j \,\dot{\cup}\, \mathcal{B}_i'$$

linear unabhängig (Korollar 18.1) und $|\mathcal{B}'| = n + 1$. Widerspruch (unmöglich).

"$\Leftarrow$" Sei $\sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$ und $\mathcal{B}_j$ eine Basis für W_{d_j} für jedes $j = 1, \ldots, k$.
Setze $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Dann ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig (Korollar 18.1)
und $|\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{B}_j| = \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.
Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis für V und besteht aus Eigenvektoren von T. Also ist T diagonalisierbar. □

Sei nun $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ diagonalisierbar, $d_1, \ldots, d_k$ die verschiedenen Eigenwerte und $\mathcal{D}$ eine Basis bestehend aus Eigenvektoren (und geordnet, so dass die ersten Basisvektoren Eigenvektoren zu d_1 sind, d_2 usw.). Dann ist

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & d_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & d_k & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_k \end{pmatrix}$$

wobei für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ erscheint d_i ℓ_i-mal mit

$$\ell_i := \dim W_{d_i}$$

und damit ist Char. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$. $(*)$

Umgekehrt, ist Char. Pol. (T) wie in $(*)$ (mit $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$ und $\ell_i = \dim W_{d_i}$), dann ist T diagonalisierbar, weil $\sum_{i=1}^{k} \dim W_{d_i} = n$ ist (siehe Lemma 18.2).

Wir haben bewiesen:

Satz 18.3.
Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Es gilt: T ist diagonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$, wobei die Vielfachheit ℓ_i der Nullstelle $d_i \dim W_{d_i}$ ist.

Terminologie:
$\dim W_d$ wird auch **geometrische Vielfachheit** der Nullstelle d genannt.

Im Allgemeinen gilt:

Satz 18.4.
Sei $\dim(V)$ endlich, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sei d ein Eigenwert von T mit Vielfachheit μ. Es gilt: $\ell := \dim(W_d) \le \mu$.

Beweis:
Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ eine Basis von W_d.
Ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1}, \dots \alpha_n\}$ von V.
Es ist

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & B & \\ 0 & & d & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & & C & \end{array}\right)$$

Wir berechnen Char. Pol. (A) (siehe ÜB):

$$\det(xI - A) = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} x-d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & -B & \\ 0 & & x-d & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & & xI - C & \end{array}\right) = (x-d)^\ell \det(xI - C)$$

Also ist $\ell \le \mu$. □

Beispiel 18.5.
• T in den Beispielen 17.9. sind beide **nicht** diagonalisierbar.

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Char. Pol. $(A) = (x-1)(x-2)^2$.

$d_1 = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Rang $(A-I) \neq 3$, weil $\det(A-I) = 0$ ist. Es ist klar, dass Rang $(A-I) \ge 2$. Also Rang $(A-I) = 2$.

$d_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Rang $(A - 2I) = 1$.

Also ist $\dim W_{d_1} = 1$ und $\dim W_{d_2} = 2$ und $\dim W_{d_1} + \dim W_{d_2} = 3$. Also ist T diagonalisierbar: Es existiert eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$