

# 17 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## KAPITEL III: NORMALFORMEN.

In diesem Kapitel werden wir die möglichen Matrixdarstellungen für lineare Operatoren  $T$  auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  noch genauer untersuchen, als wir es in der LA I (Kapitel 3; ab Skript 20) gemacht hatten. Wir werden uns darum bemühen zu verstehen, ob wir besonders "schöne" Matrixdarstellungen finden können. Das heißt, wir werden versuchen besonders "geeignete" Basen für  $T$  und  $V$  zu finden, wenn das möglich ist. In Skript 17 fangen wir damit an.

### § 9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum.

**Definition 17.1.**

(a) Sei  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ . Dann ist  $c \in K$  ein *Eigenwert* von  $T$ , falls ein  $\alpha \in V$  existiert mit  $\alpha \neq 0$  und

$$T(\alpha) = c\alpha.$$

(b) Sei  $\alpha \in V$  und  $T(\alpha) = c\alpha$ , dann heißt  $\alpha$  *Eigenvektor* (zum Eigenwert  $c$ ).

(c)  $W_c := \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = c\alpha\}$  ist ein Unterraum, der *Eigenraum* (zum Eigenwert  $c$ ).

**Bemerkung 17.2.**

$W_c = \ker(T - cI)$ , d.h.  $W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (T - cI)\alpha = 0\}$ .

Wir folgern aus Satz 16.8, Bemerkung 17.2 und Definition 17.1:

**Satz 17.3.**

Seien  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ,  $c \in K$ . Äquivalent sind:

(i)  $c$  ist Eigenwert von  $T$ .

(ii)  $(T - cI)$  ist nicht invertierbar.

(iii)  $\det(T - cI) = 0$ .

**Satz 17.4.**

$\det(T - xI)$  ist ein normiertes Polynom von Grad  $n = \dim(V)$ . Die Eigenwerte von  $T$  sind genau dessen Nullstellen,  $T$  kann also höchstens  $n$  Eigenwerte in  $K$  haben.

**Beweis:**

Sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ . Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ ,  $A = [T]_{\mathcal{B}}$ . Es ist  $xI - A = [xI - T]_{\mathcal{B}}$ .

Nun ist

$$B := xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & \\ & & x - a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } b_{ii} = (x - a_{ii}).$$

Also sind die Einträge von  $B$  Polynome vom Grad 0 oder 1 oder das Nullpolynom und

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} (\text{sign } \tau) b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}.$$

Wir berechnen:

$$\deg (b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : \tau(i) = i\}|.$$

Also ist  $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$  der einzige Term vom Grad  $n$  und somit der Hauptterm. Wir sehen also,

dass

$\deg \left( \sum_{\tau} (\text{sign } \tau) b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)} \right) = n$  und außerdem, dass  $\det(xI - A)$  ein normiertes Polynom ist. Die letzte Aussage folgt wegen Satz 17.3 und Korollar 4.3.  $\square$

**Definition 17.5.**

$c \in K$  ist ein Eigenwert von  $A \in M_{n \times n}(K)$ , falls  $\det(cI - A) = 0$ . Also sind die Eigenwerte von  $A$  die Nullstellen von  $\det(xI - A)$ .

**Definition 17.6.**

$f(x) := \det(xI - A)$  ist das charakteristische Polynom von  $A$ .

**Lemma 17.7.**

Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

**Beweis:**

Für  $B = P^{-1}AP$  gilt

$$\det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) = \det P^{-1} \det(xI - A) \det P = \det(xI - A). \quad \square$$

**Definition 17.8.**

Sei  $V$  endlich dim;  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ .

$$\text{Char. Pol. } (T) := \text{Char. Pol. } ([T]_{\mathcal{B}})$$

für irgendeine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  (und damit für jede Basis).

**Beispiel 17.9.**

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

hat keine reelle Eigenwerte, weil  $\det(xI - A) = x^2 + 1$  keine reellen Nullstellen hat.

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$\text{Char. Pol. } (A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Eigenwerte  $c = 1$ ,  $c = 2 \in \mathbb{R}$ .

$$\bullet \quad c = 1 \quad \ker(A - I) := W_1$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang} = 2, \text{ also } \dim W_1 = 1.$$

Wir wollen eine Basis für  $W_1$  finden. Löse

$$(A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = (1, 0, 2)$  ist eine Lösung und  $\{\alpha_1\}$  ist eine Basis für  $W_1$ .

$$\bullet \quad c = 2 \quad \ker(A - 2I) := W_2$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ hat Rang} = 2, \text{ also } \dim W_2 = 1.$$

Finde Lösung wie oben:  $\alpha_2 = (1, 1, 2)$  und  $\{\alpha_2\}$  ist eine Basis für  $W_2$ .

### Lemma 17.10.

Seien  $c_i$  für  $i = 1, \dots, k$  Eigenwerte von  $T$ , und nehme an, dass  $c_i \neq c_j$  für alle  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Sei  $v_i \neq 0$ ;  $v_i \in V$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $c_i$ . Dann ist  $\{v_1, \dots, v_k\}$  linear unabhängig.

### Beweis:

Bemerke, dass  $v \in V, v \neq 0 \Rightarrow v$  kann nicht Eigenvektor zu verschiedenen Eigenwerten sein.

Wir führen einen Beweis per Induktion:  $k = 2$ .

Ist  $v_2 = cv_1$ , so ist  $v_2 \in W_{c_1}$ , also ist  $v_2$  ein Eigenvektor zu  $c_1$  und  $c_2 \neq c_1$ . Widerspruch.

Induktionsannahme gelte für  $k - 1$ .

Seien  $v_1, \dots, v_k$  linear abhängig. OE haben wir also  $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$ .

$$T(v_k) = c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i \quad \text{und} \quad T(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$

$$\Rightarrow c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i) v_i = 0$$

$$\Rightarrow c_k - c_i = 0 \Rightarrow c_k = c_i \quad (\text{mit } i = 1, \dots, k-1).$$

Widerspruch. □

**Korollar 17.11.**

Seien  $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ . Nimm an, dass  $T$   $n$ -verschiedene Eigenwerte  $d_1, \dots, d_n$  in  $K$  hat. Dann hat  $V$  eine Basis  $\mathcal{D}$ , bestehend aus Eigenvektoren von  $T$ .

**Definition 17.12.**

Seien  $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ .  $T$  ist diagonalisierbar (über  $K$ ), falls  $V$  eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von  $T$  hat.

**Bemerkung 17.13.**

Seien  $d_1, \dots, d_n$  verschiedene Eigenwerte von  $T$  und  $\mathcal{D}$  eine Basis wie in Korollar 17.11. Dann ist  $[T]_{\mathcal{D}}$  diagonal.