

16 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir weitere Eigenschaften und Formelberechnungen für die Determinante finden, und damit Kapitel II beenden.

Ansatz von Skript 15: A $n \times n$ über R , A_{ij} (auch a_{ij}) bezeichnet den ij -ten Koeffizient von A .

Definition 16.1.

$C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i | j] = (-1)^{i+j} D_{ij}$ ist der ij -te Kofaktor von A .

Korollar 15.8 besagt also, dass für jede j -te Spalte gilt: $\det(A) = \sum_{i=1}^n A_{ij} C_{ij}$.

Lemma 16.2.

$$k \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij} = 0.$$

Beweis:

Ersetze die j -te Spalte von A durch ihre k -te Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B . Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik}$ für alle i . B hat zwei gleiche Spalten, also ist $\det(B) = 0$. Nun ist $B[i | j] = A[i | j]$. Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(B) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} B_{ij} \det B[i | j] \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ik} \det A[i | j] \\ &= \sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir fassen zusammen:

Korollar 16.3.

Für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij} = \delta_{jk} \det(A)$ (*)

Definition 16.4.

Die zu A adjungierte Matrix $\text{adj}(A)$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A , das heißt $(\text{adj } A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j} \det A[j | i]$.

Die Formeln für Matrix-Produkte, gemeinsam mit (*) ergeben:

Korollar 16.5.

$$(\text{adj } A)A = \det(A)I_n. \quad (**)$$

Lemma 16.6.

$$A(\text{adj } A) = \det(A)I_n.$$

Beweis:

Es gilt offensichtlich, dass $A^t[i | j] = A[j | i]^t$.

Wir berechnen wegen Satz 15.4:

$$(-1)^{i+j} \det A^t[i | j] = (-1)^{i+j} \det A[j | i]$$

(ij -te Kofaktor von $A^t = ji$ -te Kofaktor von A).

$$\text{Also } \text{adj}(A^t) = (\text{adj } A)^t \quad (***)$$

Nun impliziert $(**)$ für A^t : $(\text{adj } A^t)A^t = (\det A^t)I_n = (\det A)I_n$.

Zusammen mit $(***)$ erhalten wir $(\text{adj } A)^t A^t = [A(\text{adj } A)]^t = (\det A)I_n = A(\text{adj } A)$.

Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Korollar 16.7.

$$A(\text{adj } A) = (\det A)I_n \text{ und } (\text{adj } A)A = \det(A)I_n \quad (\dagger)$$

Erinnerung (LA I Skript 9):

$A \in M_{n \times n}(R)$ ist über R invertierbar, falls es $B \in M_{n \times n}(R)$ gibt, so dass $AB = BA = I_n$.

Genauso wie für den Fall wo $R = K$ ein Körper ist, gilt: Wenn B existiert, dann ist B eindeutig;

$$B = A^{-1}.$$

Satz 16.8.

$A \in M_{n \times n}(R)$ ist über R invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in R^\times$ (eine Einheit in R). Insbesondere wenn $R = K$ ein Körper ist; dann ist A invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$, und wenn $R = K[x]$; dann ist A invertierbar über $K[x]$ genau dann, wenn $\det(A) \in K^\times$.

Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1} \text{adj}(A)$.

Beweis:

Aus (\dagger) sehen wir: $\det(A)$ invertierbar in R (i.e., eine Einheit von R) $\Rightarrow A$ invertierbar über R und $A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{adj } A$.

Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)$ ist eine Einheit in R .

Für $R = K[x]$: $f, g \in K[x]$; $fg = 1 \Rightarrow \deg f + \deg g = 0 \Rightarrow \deg f = \deg g = 0$.

Also sind die Einheiten von R die Skalarpolynome, die ungleich 0 sind. \square

Beispiel 16.9.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$$

$\det(A) = -2$. A ist nicht invertierbar über \mathbb{Z} . A ist aber invertierbar als Matrix mit Einträgen

$$\text{aus } \mathbb{Q} \text{ und } A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 16.10.

$$R = \mathbb{R}[x]$$

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + x & x + 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & x + 2 \\ x^2 - 2x + 3 & x \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = x + 1$$

$$\det B = -6$$

A nicht invertierbar

B invertierbar

Lemma 16.11.

Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinanten.

Beweis

$$B = P^{-1} A P \text{ für } A, B \in M_{n \times n}(K)$$

$$\det B = \det(P^{-1} A P) = \det(P)^{-1} \det(P) \det(A) = \det(A)$$

□

Wegen Lemma 16.11 können wir nun folgendes definieren:

Definition 16.12.

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, $\dim(V) = n$ und $T : V \rightarrow V$ ein linearer Operator. Wir definieren $\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$ für eine beliebige Basis \mathcal{B} von V .

Wir beenden das Skript, und somit das Kapitel, mit einer nützlichen Formel:

Satz 16.13. (Cramer's Regel)

$$\text{Sei } A \in M_{n \times n}(K) \text{ mit } \det(A) \neq 0 \text{ und } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}.$$

Betrachte das lineare Gleichungssystem $AX = Y$. Dann kann man seine eindeutige Lösung

$$X = A^{-1}Y \text{ so beschreiben: } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ wobei } x_j = \frac{\det B_j}{\det A} \text{ und } B_j \text{ die } n \times n\text{-Matrix ist, die man}$$

erhält, wenn man die j -te Spalte von A durch Y ersetzt.

Beweis:

Es gilt $\text{adj}(A)AX = \text{adj}(A)Y$, also (wegen Korollar 16.7) gilt: $(\det A)X = \text{adj}(A)Y$.

$$\text{Also } (\det A)x_j = \sum_{i=1}^n (\text{adj } A)_{ji} y_i.$$

Damit gilt für $1 \leq j \leq n$, dass $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} y_i \det A[i | j] = \det B_j$.

□