14 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 8 haben wir eine n-lineare Form δ als Abbildung mit Definitionsbereich $M_{n\times n}(K)$ aufgefasst. In diesem Skript werden wir diese Abbildungen genauer analysieren und ihre Eigenschaften studieren. Insbesondere werden wir die Determinante als solche betrachten.

Hier sei $\delta: K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ eine alternierende lineare Form und $A \in M_{n\times n}(K)$.

Lemma 14.1.
Sei e eine elementare Zeilenumformung. Es gelten:

(*i*) $\delta(e(A)) = \delta(A)$; e von Typ 3;

(*ii*) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$; e von Typ 1;

(*iii*) $\delta(e(A)) = c\delta(A)$; e von Typ 2.

(*iv*) Allgemeiner gilt: $\forall c \in K: \delta(cA) = c^n\delta(A)$.

Beweis:

(*i*) $\delta(z_1 + cz_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n) + c\delta(z_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

(*ii*) Folgt aus Lemma 7.8.

(*iii*) Folgt aus n-Linearität.

(*iv*) $\delta(cz_1, cz_2, \ldots, cz_n) = c\delta(z_1, cz_2, \ldots, cz_n) = c^2\delta(z_1, z_2, \ldots, cz_n) = \cdots = c^n\delta(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. □

Lemma 14.2.
Für jedes $A \in M_{n\times n}(K)$ gibt es einen Skalar $\Delta_A \neq 0; \Delta_A \in K$, und Δ_A **hängt nur von A ab**, so dass: $\delta(A) = \Delta_A\delta(\text{r.z.S.F.}(A))$.

Beweis:
Ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Lemma 14.1. Wir sehen, dass Δ_A ein Produkt der Gestalt $(-1)^\ell c_1 \ldots c_k$ für geeignete $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, \ldots, c_k \in K^\times$ ist. □

Bemerkung 14.3.
Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt die folgende Dichotomie:
Fall 1: r.z.S.F.(A) hat eine Nullzeile oder **Fall 2:** r.z.S.F$(A) = I_n$
(siehe Skript 7 Lineare Algebra I; Bemerkung 7.3).
Also erhalten wir hier auch eine Dichotomie:
Fall 1: $\delta(A) = \Delta_A 0 = 0$ oder **Fall 2:** $\delta(A) = \Delta_A\delta(I_n)$.

Korollar 14.4.
$\delta \neq 0$ genau dann, wenn $\delta(I_n) \neq 0$.

Beweis:
"$\Leftarrow$": Klar.

"$\Rightarrow$": $\delta(I_n) = 0 \rightarrow \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2). □

Korollar 14.5.
Seien $\delta \neq 0, A \in M_{n\times n}(K)$. Es gilt $\delta(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist.

Beweis:
Folgt unmittelbar aus Lemma 14.2 und Korollar 14.4 weil: A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ r.z.S.F.$(A) = I_n$ (siehe Skript 9 Lineare Algebra I; Satz 9.8). □

Definition 14.6. und Notation
$\mathbb{A} := alt^{(n)}(K^n) :=$ die Menge der n-linearen alternierenden Formen auf K^n.

Bemerkung 14.7.
$\mathbb{A}$ ist ein K-Vektorraum; er ist ein Unterraum von $L^{(n)}(K^n \times \cdots \times K^n; K)$.

Korollar 14.8.
Seien δ_1, δ_2 n-lineare alternierende Formen auf K^n. Es gilt $\delta_1 = \delta_2$ genau dann, wenn $\delta_1(e_1, \ldots, e_n) = \delta_2(e_1, \ldots, e_n)$.

Beweis:
Wir erinnern daran, dass $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standard-Basis bezeichnet. Wir haben also $\delta_1 - \delta_2 \in \mathbb{A}$, und $(\delta_1 - \delta_2)(I_n) = 0$. Aus Korollar 14.4 folgt $\delta_1 - \delta_2 = 0$. □

Korollar 14.9.
$\dim(alt^{(n)}(K^n)) \leq 1$.

Beweis:
Sei $\delta_1 \neq 0, \delta_1 \in \mathbb{A}$ fest. Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ wie im Fall 2 von Bemerkung 14.3.

Es gilt $\delta_2(A) = \Delta_A \delta_2(I_n) = \Delta_A \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \delta_1(I_n)$. $(*)$

Setze $d := \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$.

Aus $(*)$ folgt nun: $\delta_2(A) = d\Delta_A \delta_1(I_n) = d\delta_1(A)$ für alle $A \in M_{n\times n}(K)$.
Also ist $\delta_2 = d\delta_1$. □

Wir werden nun zeigen, dass ein $\delta \in \mathbb{A}$ existiert mit $\delta(I_n) = 1$. Solch ein Funktional δ ist wegen Korollar 14.8 notwendig eindeutig! Hierzu brauchen wir folgendes:

Formelberechnung

Seien $\delta \in \mathbb{A}$ und $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$; $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Wir schreiben $z_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$ in der Standardbasis.
Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}e_{j_n}\right) \overset{n\text{-lin.}}{=} \qquad (*)$$

$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}\dots a_{nj_n}\delta(e_1,\dots,e_n). \qquad (**)$$

Für jeden Summand in $(**)$, betrachte nun die Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} \{1,\dots,n\} & \longrightarrow & \{1,\dots,n\} \\ i & \longmapsto & j_i \end{array} .$$

- Wenn diese Abbildung **nicht** injektiv ist, dann gibt es eine Wiederholung in $(j_1,\dots,j_n)$ und damit ist $\delta(e_{j_1},\dots,e_{j_n}) = 0$.
- Wenn diese Abbildung injektiv ist, dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$ und damit ist $\delta(e_{j_1},\dots,e_{j_n}) = \delta(e_{\pi(1)},\dots,e_{\pi(n)}) = sign(\pi)\delta(e_1,\dots,e_n)$.

Also können wir nun $(**)$ umschreiben.

$$\begin{array}{rcl} (**) & = & \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\dots a_{n\pi(n)}\delta(e_1,\dots,e_n) \\ & = & \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\dots a_{n\pi(n)}\delta(I_n) \\ & = & \delta(I_n)\sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\dots a_{n\pi(n)} \qquad (***) \end{array}$$

Wir sehen also, dass $\delta(I_n) = 1$ eine Formel für δ liefert wie in $(***)$:

Satz 14.10.
Definiere für $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$:

$$\delta(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\dots a_{n\pi(n)} \qquad \text{(det)}$$

Dann ist δ eine n-lineare alternierende Form und erfüllt $\delta(I_n) = 1$.

Beweis:

- n-linear? Berechne
  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} + da'_{1\pi(1)})a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}\right] =$
  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}) + d(a'_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)})\right]$
  usw. . . . . . Übungsaufgabe.

- alternierend?
  Sei $z_1 = z_2$, i.e. $a_{1j} = a_{2j}$ für alle $1 \leq j \leq n$, i.e. $a_1\pi(j) = a_{2\pi(j)}$ für alle $\pi \in S_n$ und $1 \leq j \leq n$.

Berechne (mit $S_n = A_n \cup A_n(12)$)

$$\begin{aligned}
\delta(A) &= \sum_{\pi \in A_n \cup A_n(12)} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} \\
&= \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{\text{(I)}} \right) \\
&\quad + \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} [sign(\pi)(12)]\ a_{1\pi(12)(1)}\ a_{2\pi(12)(2)}\ a_{3\pi(12)(3)} \cdots a_{n\pi(12)(n)}}_{\text{(II)}} \right)
\end{aligned}$$

In der Summe (II) bekommen wir:

$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(2)}\ a_{2\pi(1)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} =$$
$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Wir sehen also, die Terme kürzen sich weg, i.e. in (I) bzw. (II): $a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$, i.e. (I) + (II) = 0.

- Sei $0 \neq A$ diagonal; also $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Das heißt, dass die einzige Permutation, die einen Beitrag $\neq 0$ bringt, diejenige ist, für die $i = \pi(i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, i.e. $\pi = (1)$ die Identität in S_n. Es bleibt also nur ein Produkt in (det) übrig, nämlich $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \delta(A)$, insbesondere ist $\delta(I_n) = 1$. □

Korollar 14.11.
$\dim alt^{(n)}(K^n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 14.12. Die *Determinante* (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare alternierende Form det auf K^n, wofür $\det(I_n) = 1$ gilt.