13 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im Abschnitt 7 werden wir den Begriff "m-lineare Formen" einführen (eine natürliche Verallgemeinerung vom Begriff "lineare Funktionale") und in Abschnitt 8 werden wir besondere m-lineare Formen studieren. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwending.

§ 7 Multilineare Formen

Definition 13.1.
Sei K ein Körper und seien U, V K-Vektorräume.

$$\beta: U \times V \longrightarrow K$$

$$(x,y) \longmapsto \beta(x,y)$$

ist ein *bilineares Funktional* (oder bilineare Form), falls gilt:

(1) $\beta(c_1x_1 + c_2x_2, y) = c_1\beta(x_1,y) + c_2\beta(x_2,y)$ und

(2) $\beta(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\beta(x,y_1) + d_2\beta(x,y_2)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U$, $y, y_1, y_2 \in V$ und $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Beispiel 13.2.
$V \times V^* \longrightarrow K$
$(x,f) \longmapsto [x,f]$, wobei $[x,f] := f(x)$.
Die definierenden Eigenschaften und Verknüpfungen in V^* liefern

(1) $[c_1x_1 + c_2x_2, y] = c_1[x_1,y] + c_2[x_2,y]$ und

(2) $[x, d_1y_1 + d_2y_2] = d_1[x,y_1] + d_2[x,y_2]$.

Notation
$L^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$. Sie ist ein Vektorraum (mit den Verknüpfungen $(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)(x,y) := c_1\beta_1(x,y) + c_2\beta_2(x,y)$ wie üblich).

Definition 13.3.
Seien $m \in \mathbb{N}$ und $V_1, \ldots, V_m$ K-Vektorräume. Ein *m-lineares Funktional* (Form) (oder multilineares Funktional vom Grad m) auf $\varphi_1 \times \cdots \times V_m$ ist eine Abbildung $\mu: V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow K$, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \mu(\alpha_1, \ldots, & c\alpha_i + \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & = \\ c\mu(\alpha_1, \ldots, & \alpha_i & , \ldots, \alpha_m) & + \\ \mu(\alpha_1, \ldots, & \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & \end{array}\right\} \quad \text{für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i;\ c \in K.$$

Notation
$L^{(m)}(V_1 \times \cdots \times V_m; K) := K$-Vektorraum der m-linearen Formen.

Bemerkung 13.4.
Sei μ multilinear. Wenn $\alpha_i = 0$ (für irgendein i), dann gilt $\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m) = 0$.

§ 8 Alternierende multinineare Formen auf K^n

Definition 13.5.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n-\text{mal}} \longrightarrow K$$

ist *alternierend*, wenn für alle $(z_1, \dots, z_n)$ wofür es $i \neq j$ gibt mit $z_i = z_j$, gilt $\delta(z_1, \dots, z_n) = 0$.

Konvention
δ wird auch als Abbildung auf $K^{n\times n} = M_{n\times n}(K)$ aufgefasst, nämlich

$$\delta(A) = \delta(z_1, \dots, z_n), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ \cdots \\ --- \\ z_n \end{pmatrix};$$

i.e. z_i ist die $i$te Zeile der $n \times n$-Matrix A.

Lemma 13.6. Sei δ alternierend. Es gelten:

(i) $z_1, \dots, z_n$ sind linear abhängig $\Rightarrow \delta(z_1, \dots, z_n) = 0$.

(ii) Für alle $i \neq j$ gilt $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$.
Es gilt allgemeiner, dass $\delta(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}) = \text{sign}(\pi)\delta(z_1, \dots, z_n)$ für alle $\pi \in S_n$. Siehe ÜB.

Beweis:

- Ohne Einschränkung nehmen wir an $\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_{n-1} \in K$.
  Wir berechnen:
  $$\delta(z_1, \dots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(z_1, \dots, z_{n-1}, z_i) = 0.$$

- Wir berechnen:
  $$\begin{aligned} 0 &= \delta(z_1, \dots, z_i + z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) \\ &= \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) \\ &\quad + \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) \\ &= \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) \\ &\quad + \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) \\ &\quad + \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j, \dots, z_n) \\ &\quad + \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n). \end{aligned}$$
  Also: $0 = \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$ wie behauptet. □

Bemerkung 13.7.

(1) Wenn $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, dann gilt auch die Umkehrung von Lemma 13.6 (ii); d.h. wenn δ Lemma 13.6(ii) erfüllt, dann ist δ alternierend:

Sei $z_i = z_j$ für $i \neq j$. Da δ Lemma 13.6(ii) erfüllt, ist

$$\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n) = -\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n).$$

Da $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ gilt $\forall a \in K\colon a = -a \Rightarrow a = 0$. Insbesondere $\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n) = 0$.

(2) Gegenbeispiel für den Fall wo $\mathrm{Char}(K) = 2$.
Betrachte folgende bilineare Form auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$:

$$\delta((a,b),(c,d)) := ac + bd.$$

Dann gilt $\delta((a,b),(c,d)) = -\delta((c,d),(a,b))$ immer, jedoch ist z.B. $\delta((1,0),(1,0)) = 1 \neq 0$.