11 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL II: MULTILINEARFORMEN UND DETERMINANTEN.

In diesem Skript führen wir die symmetrische Gruppe Sn ein, die wir für die Definition der Determinante später brauchen. Unser erstes Ziel ist es Satz 11.8 zu beweisen. Wir werden die Untersuchung von S_n in Skript 12 fortsetzen.

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n

Notation 11.0.
Für $n \in \mathbb{N}$, setze $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$.

Definition 11.1.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine *Permutation* auf $\mathbb{N}_n$ ist eine Bijektion $\alpha\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. Wir schreiben S_n für die Menge der Permutationen auf $\mathbb{N}_n$. Diese Menge S_n versehen mit der Verknüpfung $S_n \times S_n \to S_n, (\alpha, \beta) \rightarrowtail \alpha \circ \beta$ ist eine Gruppe; die *symmetrische Gruppe auf n Elementen.*
Notation: Wir schreiben $\alpha\beta := \alpha \circ \beta$. Für $\alpha \in S_n$ schreiben wir:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \alpha(1) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

• Warum ist S_n eine Gruppe?

1. Wenn $\alpha, \beta \in S_n$, dann ist $\alpha \circ \beta$ bijektiv, also $\alpha \circ \beta \in S_n$.
2. Die Identitätsabbildung $\epsilon\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, definiert durch $\epsilon(i) := i$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$, ist das neutrale Element von S_n.
3. Bijektive Abbildungen sind invertierbar: wenn $\alpha \in S_n$, dann gibt es $\beta \in S_n$ so dass $\alpha \circ \beta = \epsilon$.
4. Multiplikation ist assoziativ, weil die Komposition von Abbildungen immer assoziativ ist.

□

Beispiel 11.2.
Die Permutation $\alpha \in S_5$ mit $\alpha(1) = 3; \alpha(2) = 5; \alpha(3) = 4; \alpha(4) = 1; \alpha(5) = 2$ wird so geschrieben:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition 11.3.

1. Sei $\alpha \in S_n$. Wenn es $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}_n$ gibt so dass:
   - $\alpha(a_i) = a_{i+1};\ \forall\ 1 \leq i \leq m-1$; und
   - $\alpha(a_m) = a_1$ und
   - $\alpha(x) = x;\ \forall x \notin \{a_1, \dots, a_m\}$,

   dann heißt α ein *m-Zyklus*.
   Notation dafür: $(a_1\ a_2 \dots a_m)$.

   Konvention: Die Identitätsabbildung wird mit $\epsilon := (1)$ bezeichnet.

2. Ein 2-Zyklus heißt eine *Transposition*.

Beispiel 11.4.
Die Permutation

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ist der 3-Zyklus (142).

Definition 11.5.
Die Permutationen $\alpha, \beta \in S_n$ sind *disjunkt*, wenn

$$\{x\ ;\ \alpha(x) \neq x\} \cap \{x\ ;\ \beta(x) \neq x\} = \emptyset.$$

Beispiel 11.6.
Betrachte folgende Transpositionen:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (12)$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (34)$$

und

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (23)$$

Die Permutationen σ und τ sind disjunkt, σ und γ sind nicht disjunkt, τ und γ sind nicht disjunkt.

Lemma 11.7.
Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in S_n$ paarweise disjunkte Permutationen und sei $\tau \in S_n$. Die Permutationen $\alpha_1 \dots \alpha_m$ und τ sind disjunkt genau dann, wenn für alle $1 \leq i \leq m$ die Permutationen α_i und τ disjunkt sind.

Beweis: Siehe ÜB. $\square$

Satz 11.8. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ hat eine Darstellung als Produkt $\sigma = \alpha_1 \dots \alpha_m \in S_n$ paarweise disjunkte Zyklen sind.

Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach:

$$\Gamma(\sigma) := |\{a \in \mathbb{N}_n \ ; \ \sigma(a) \neq a\}|$$

- Induktionsanfang:
  wenn $\Gamma(\sigma) = 0$, dann ist $\sigma = \epsilon = (1)$.
- Induktionsannahme:
  die Aussage gelte für alle $\tau \in S_n$ wofür $\Gamma(\tau) < k$.
- Induktionsschritt:
  Setze $k := \Gamma(\sigma) > 0$. Sei $i_0 \in \mathbb{N}_n$ so dass $\sigma(i_0) \neq i_0$.
  Für $s \in \mathbb{N}$ setze $i_s := \sigma^s(i_0)$. Da $\{i_s \ ; \ s \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_n$, ist diese Menge endlich.
  Folglich gibt es $p < q \in \mathbb{N}$ so dass $i_p = i_q$. Insbesondere ist $\sigma^{q-p}(i_0) = i_0$.
  Also ist die Menge $\{l \in \mathbb{N} \ ; \ \sigma^l(i_0) = i_0\}$ nicht die leere Menge.
  Sei $p \geq 2$ die kleinste natürliche Zahl wofür $\sigma^p(i_0) = i_0$ und setze $r := p - 1$.
  Die Minimalität von p impliziert, dass $|\{i_0, \ldots, i_r\}| = p$
  (wenn $i_j = i_l$ für $0 \leq j < l \leq r$ dann wäre $\sigma^{l-j}(i_0) = i_0$, und $l - j < p$, Widerspruch).
  Analog beweist man: für $a \in \{i_0, \ldots, i_r\}$ gilt $\sigma(a) \neq a$. $(*)$
  Betrachte den Zyklus $\tau := (i_0 \ldots i_r)$.
  Per Definition gilt für alle $0 \leq l \leq r$ dass $\tau(i_l) = \sigma(i_l)$. $(\dagger)$
  Bemerke auch, dass für ein $a \in \mathbb{N}_n$: $\tau(a) = a$ genau dann, wenn $a \notin \{i_0, \ldots, i_r\}$. $(**)$
  Aus $(*)$ folgt außerdem, dass $\sigma(a) = a$ impliziert $a \notin \{i_0, \ldots, i_r\}$. $(***)$
  Aus $(\dagger), (**)$ und $(***)$ folgt unmittelbar:

  $$\{a \in \mathbb{N}_n \ ; \ \tau^{-1}\sigma(a) = a\} = \{a \in \mathbb{N}_n \ ; \ \sigma(a) = a\} \cup \{i_0, \ldots, i_r\}. \quad (\dagger\dagger)$$

  Also ist $\Gamma(\tau^{-1}\sigma) < \Gamma(\sigma)$ und die Induktionsannahme gilt dafür. Schreibe

  $$\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \ldots \alpha_m$$

  oder

  $$\sigma = \tau\alpha_1 \ldots \alpha_m$$

  wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ paarweise disjunkte Zyklen sind.
  Aus $(\dagger\dagger)$ und $(**)$ folgt:
  $\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \ldots \alpha_m$ und τ sind disjunkt. Schließlich folgt aus Lemma 11.7, dass auch $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ paarweise disjunkte Zyklen sind. $\square$