20. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy
SS 2016: 23. Juni 2016

Beweis (iii) (Dreiechsungleichung für Norm und Distanz)
$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2+(x \mid y)+(y \mid x)+\|y\|^2 = \|x\|^2+(x \mid y)+\overline{(x \mid y)}+\|y\|^2 =$
$\|x\|^2 + 2Re(x \mid y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2 \mid (x \mid y) \mid + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \; \|y\| + \|y\|^2 =$
$(\|x\| + \|y\|)^2$ □

Satz 1 (Gram-Schmidt)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einem inneren Produkt. Dann hat V eine Basis, bestehend aus einer orthonormalen (vollständigen) Menge.

Definition Sei S eine Basis, S orthonormal, dann heißt S eine orthonormale Basis.

Beweis Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis. Wir werden eine orthonormale Basis
$$\mathcal{J} = \{y_1, \dots, y_n\}$$
per Induktion bilden.

I. Anf: $x_1 \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$.

I.A: Seien $y_1, \dots, y_r$ schon definiert, so dass $\{y_1, \dots, y_r\}$ orthonormal und $y_j \in span\{x_1, \dots, x_j\}$ für $j = 1, \dots, r$.

I.S.: Betrachte
$$z := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i y_i, c_i \in K \qquad (*)$$
Berechne $(z \mid y_j) = (x_{r+1} \mid y_j) - c_j$ für $j = 1, \dots, r$. Nun setze $c_j = (x_{r+1} \mid y_j)$. Mit dieser Wahl in $(*)$ ist $(z \mid y_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, r$ und
$$z \in span\{x_{r+1}, y_1, \dots, y_r\} \subseteq span\{x_{r+1}, x_1, \dots, x_r\},$$
$z \neq 0$, da $x_1, \dots, x_{r+1}$ linear unabhängig sind und der Koeffizient in $(*)$ von x_{r+1} ist nicht Null. Nun setze $y_{r+1} := \frac{z}{\|z\|}$. □

Satz 2 Sei W ein Unterraum. Es gilt
(1) $V = W \oplus W^\perp$
(2) $W^{\perp\perp} = W$.

Beweis Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine orthonormale Basis für W und $z \in V$. Schreibe
$$W \ni x := \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \text{ wobei } c_i = (z \mid x_i).$$
Bessel liefert: $y := z - x$ ist orthogonal zu x_i und damit zu W, das heißt $y \in W^\perp$.
Also $z = x + y$, $x \in W, y \in W^\perp$.
Es gilt ferner, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$ (weil $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

(2) $z = x + y$. Also $(z \mid x) = \|x\|^2 + (y \mid x) = \|x\|^2$. Analog $(z \mid y) = \|y\|^2$.
Wenn $z \in W^{\perp\perp}$, dann $(z \mid y) = 0 = \|y\|^2$. So $z = x \in W$. □

§ 15 Lineare Funktionale

Satz 3 (Riesz-Darstellung)
Sei V ein endlich dim. inneres Produkt K-Vektorraum.
Sei $f \in V^*$. Es existiert genau ein $y \in V$ mit $f(x) = (x \mid y)$ für alle $x \in V$ $\quad(\dagger)$.

Beweis Existenz: $f = 0 \Rightarrow y = 0$.
Sei $f \neq 0; W := \ker(f) \subsetneq V; W^\perp \neq \{0\}$.

Sei $y_0 \neq 0; y_0 \in W^\perp; OE\|y_0\| = 1$.

Setze $y := \overline{f(y_0)}y_0$. Beobachte $(y_0 \mid y) = (y_0 \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(y_0 \mid y_0) = f(y_0)$.

Somit ist $(\dagger)$ erfüllt für y_0.

Für $x = \lambda y_0$ berechnen wir allgemeiner: $f(x) = f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda(y_0 \mid y) = (\lambda y_0 \mid y)$. Also ist $(\dagger)$ erfüllt.

Für $x \in W : (x \mid y) = (x \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(x \mid y_0) = 0 = f(x)$. Also ist $(\dagger)$ erfüllt.

Sei nun $x \in V$, schreibe $x = x_0 + \lambda y_0$ mit $\lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)}$ und $x_0 := x - \lambda y_0$.

Berechne $f(x_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)}f(y_0) = 0$, so ist $x_0 \in W$
und $f(x) = f(x_0) + f(\lambda y_0) = (x_0 \mid y) + (\lambda y_0 \mid y) = (x_0 + \lambda y_0 \mid y) = (x \mid y)$. Also ist $(\dagger)$ immer erfüllt.

Eindeutigkeit:
Seien $y_1, y_2 \in V$ mit $(x \mid y_1) = (x \mid y_2)$ für alle $x \in V$. Dann $(x \mid y_1 - y_2) = 0$ für alle $x \in V$, insbesondere für $x := (y_1 - y_2)$ bekommen wir $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, so $y_1 - y_2 = 0$. □

Satz 4 Die Abbildung
$\rho : V^* \longrightarrow V$
$f \longmapsto y$
(i.e. $\rho(f)$ ist eindeutig definiert durch $f(x) = (x \mid \rho(f))$ für alle $x \in V$) erfüllt:

(i) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(ii) ρ ist surjektiv

(iii) ρ ist injektiv, aber Achtung

(iv) $\rho(cf) = \bar{c}\rho(f)$ für alle $c \in K$, i.e. ρ ist ein konjugierter Isomorphismus.

Beweis

(ii) $y \in V$. Betrachte $f(x) := (x \mid y)$. $f \in V^*$ und $\rho(f) = y$.

(iii) $f(x) = (x \mid 0) = 0$ für alle $x \Rightarrow f = 0$.

(iv) $z := \rho(cf); y := \rho(f)$. Zeige: $Z = \bar{c}y$, i.e. für alle $x \in V$: $(cf)(x) = (x \mid \bar{c}y)$.
Berechne: $(cf)(x) = cf(x) = c(x \mid y) = (x \mid \bar{c}y)$ □

Folgerungen

I. $(f_1 \mid f_2) \coloneqq (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$ definiert ein inneres Produkt auf V^*.

II. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis für V, dann existiert $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis für V mit $(x_i \mid y_i) = \delta_{ij}$ für alle i, j.

III. $W^0 \subseteq W^*$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$, i.e. $\rho(W^0) = W^\perp$.

IV. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Definiere T^* durch $(Tx \mid y) \coloneqq (x \mid T^* y)$ für alle $x \in V$ (d.h. $T^*(y) = z$, genau dann, wenn für alle $x \in V : (x \mid z) = (Tx \mid y)$).

Es gilt $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$. T^* ist die transponierte (adjungierte) Konjugierte.
Eigenschaft der tranponierten Konjugierten

(1) $(cT)^* = \overline{c} T^*$

(2) Sei $[T]_{\mathcal{X}} \coloneqq A$ und $\mathcal{Y}$ die Basis wie in II.
Es gilt $[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} \coloneqq A^*$ (i.e. der ij-te Koeffizient von A^* ist $\overline{a_{ji}}$, wobei a_{ij} der ij-te Koeefizient von A ist).

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A.

Folgerungen I., II., III. und IV. sowie Eigenschaften (1), (2) und (3) werden im Übungsblatt Nr. 12 ausgearbeitet.