19. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 21. Juni 2016

Sei $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum mit $(x \mid y) \in K$.

Erinnerung **Definition**
Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto (x \mid y), \end{aligned}$$

so dass

(1) $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$

(2) $(c_1, x_1 + c_2 x_2 \mid y) = c_1(x_1 \mid y) + c_2(x_2 \mid y)$

(3) $(x \mid x) \geq 0$ und $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung $(x \mid x) = \overline{(x \mid x)}$, also ist $(x \mid x) \in \mathbb{R}$.

Notation $(x \mid x) := \|x\|^2$ und $\|x\| := \sqrt{(x \mid x)}$ (Norm von x)

Bemerkung Es gilt

(i) $\|cx\| = |c|\ \|x\|$

(ii) $(2')$ $(x \mid c_1 y_1 + c_2 y_2) = \overline{(c_1 y_1 + c_2 y_2 \mid x)} = \overline{c_1(y_1 \mid x) + c_2(y_2 \mid x)} = \overline{c_1}\,\overline{(y_1 \mid x)} + \overline{c_2}\,\overline{(y_2 \mid x)} = \overline{c_1}(x \mid y_1) + \overline{c_2}(x \mid y_2)$

Terminologie Wenn $K = \mathbb{R}$, heißt V *Euklischer Raum* und das innere Produkt $(|)$ heißt *symmetrisch bilineare positiv definite Form.*

Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt V *hermitescher Raum, unitärer Raum* und das innere Produkt $(|)$ ist *hermitesch symmetrisch* (1), *konjugiert bilinear* (2) und (2') *positive definite Form* (3).

Beispiel auf $V = K^n$. Das Standard-Innere-Produkt $x = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$
$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \overline{\eta_i}$

Definition

(i) x, y sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ (äquivalent $(y \mid x) = 0$).

(ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ für alle $x \in W_1$ und für alle $y \in W_2$

(iii) $S \subseteq V$ ist *orthonormal*, falls $(x \mid y) = 0$, wenn $x \neq y$ und $(x \mid y) = 1$, wenn $x = y$. Also $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist orthonormal, falls $(x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$

(iv) S ist *vollständig orthonormal*, falls S orthonormal und maximal (bezüglich Inklusion) für die Eigenschaft "orthonormal" ist.

Bemerkung

(i) S ist orthonormal $\Rightarrow S$ ist linear unabhängig.

Beweis
$\sum c_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = (\sum c_i x_i \mid x_j) = \sum c_i (x_i \mid x_j) = c_j$

(ii) $\dim V = n \Rightarrow |S| \leq n$ für S orthonormal.

Definition orthogonal $\dim(V) = max\{|S| \mid S$ orthonormal$\}$

Bemerkung orthogonal $\dim(V) \leq \dim(V)$

Notation $S^{\perp} := \{x \in V \mid (x|s) = 0$ für alle $s \in S\}$

Bemerkung

(i) $S^{\perp}$ ist ein Unterraum.

Beweis
$0 = (0 \mid y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^{\perp}$.
Für $x_1, x_2 \in S^{\perp}; c \in K : (x_1 + cx_2 \mid s) = (x_1 \mid s) + c(x_2 \mid s) = 0 + 0 = 0$

(ii) $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp} := S^{\perp\perp}$

(iii) $span(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Definition $W \subseteq V$ ist ein Unterraum. $W^{\perp}$ ist das *orthogonale Komplement.*

Satz 1 (Bessel's Ungleichung)
Sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthonormal, $x \in V$. Setze $c_i := (x \mid x_i)$. Es gelten

(i) $\sum_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) $x' := x - \sum c_i x_i$ ist orthogonal zu x_j für alle $(j = 1, \ldots, n)$

Beweis $0 \leq (x' \mid x') = (x - \sum c_i x_i \mid x - \sum c_i x_i) =$
$(x \mid x) - \sum\limits_i c_i(x_i \mid x) - \sum\limits_i \overline{c_i}(x \mid x_i) + \sum\limits_{i,j} c_i\overline{c_j}(x_i \mid x_j) =$
$\|x\|^2 - \sum\limits_i c_i\overline{c_i} - \sum\limits_i \overline{c_i}c_i + \sum\limits_i c_i\overline{c_i} = \|x\|^2 - \sum\limits_i |c_i|^2.$
Damit ist (i) bewiesen.
$(x' \mid x_j) = (x \mid x_j) - \sum\limits_i c_i(x_i \mid x_j) = c_j - c_j = 0.$ Damit ist (ii) bewiesen. □

Satz 2 (Charakterisierung von Vollständigkeit)
Sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthonormal. Folgende sind äquivalent:

(i) S ist vollständig.

(ii) Aus $(x \mid x_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ folgt $x = 0$.

(iii) $spanS = V$.

(iv) $x = \sum\limits_i (x \mid x_i)x_i$ für alle $x \in V$.

(v) $(x \mid y) = \sum\limits_i (x \mid x_i)(x_i \mid y)$ für alle $x, y \in V$.

(vi) $\|x\|^2 = \sum\limits_i \mid (x \mid x_i) \mid^2$ für alle $x \in V$.

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$
$x \neq 0$. Setze $x_{n+1} := \frac{x}{\|x\|}$. Dann ist $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ orthonormal.
$\Big[(x_{n+1} \mid x_i) = 0$ und $(x_{n+1} \mid x_{n+1}) = \frac{1}{\|x\|^2}(x \mid x) = 1\Big]$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Sei $x \in V, x \notin spanS$, dann ist $x^1 = x - \sum(x \mid x_i)x_i \neq 0$ und (Satz 1) ist zu jedem x_i orthogonal. Widerspruch.

$(iii) \Rightarrow (iv)$
sei $x \in V; x = \sum c_i x_i$, also $(x \mid x_j) = \sum c_i(x_i \mid x_j) = c_j$.

$(iv) \Rightarrow (v)$
$$\left(\sum_i (x \mid x_i)x_i \;\Big|\; \sum_j (y \mid x_j)x_j\right) = \sum_{i,j}(x \mid x_i)\overline{(y \mid x_j)}(x_i \mid x_j) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid y).$$

$(v) \Rightarrow (vi)$
$(x \mid x) = \sum\limits_i (x \mid x_i)(x_i \mid x) = \sum\limits_i (x \mid x_i)\overline{(x \mid x_i)} = \sum\limits_i \; |(x \mid x_i) \;|^2.$

$(vi) \Rightarrow (i)$
sei $x \notin S$. Wenn $S \cup \{x\}$ orthonormal ist, dann ist
$\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^n \mid (x \mid x_i) \mid^2 = 0 = (x \mid x) \neq 1.$ Widerspruch. □

Satz 3 (Schwarz)
$| \ (x \mid y) \ | \leq \|x\| \ \|y\|.$

Beweis $y = 0$ ist klar.
Sei $y \neq 0; y_1 := \frac{y}{\|y\|}$ ist orthonormal und Bessel impliziert

$$| \ (x \mid y_1) \ |^2 \leq \|x\|^2.$$

Also $\frac{1}{\|y\|^2} |(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow | \ (x \mid y) \ |^2 \leq \|x\|^2 \ \|y\|^2.$ □

Definition $\delta(x,y) := \|x - y\|.$

Proposition 1

(i) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

(ii) $\delta(x,y) \geq 0; \delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ ($\triangle$ Ungleichung).

(iv) $\delta(x,y) = \delta(x+z, y+z)$

Beweis In der 20. Vorlesung. □

Ein inneres Produkt definiert also auch eine Norm:

Bemerkung und Definition $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, V$ ist ein K-Vektorraum
$V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$x \longmapsto \|x\|$
ist eine *Norm*, falls

(i) $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

(ii) $\|cx\| = |c| \ \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □