

14. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehericy

SS 2016: 2. Juni 2016

Aussage Wiederholung aus der 13. Vorlesung :

Satz von Cayley Hamilton

Sei V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $f := \text{Char. Pol.}(T)$.

Es gilt $f(T) = 0$, das heißt das minimale Polynom von T teilt f .

Beweis Seien \mathcal{K} die Algebra der Polynome in T und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V .

$A := [T]_{\mathcal{B}}$, das heißt $T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n A_{ji} \alpha_j$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Wir schreiben diese Gleichungen um, als

$$(1) \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} T - A_{ji} I)(\alpha_j) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Sei B die $n \times n$ -Matrix mit dem Koeffizienten in der Algebra \mathcal{K} definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij} T - A_{ji} I.$$

Beobachtung: $\det B = f(T)$, weil $f(x) = \det(xI - A)^t$ und die Einträge der Matrix $(xI - A)^t_{ij} = \delta_{ij} x - A_{ji}$. Also $(xI - A)^t(T) = \delta_{ij} T - A_{ji} I = B_{ij}$ und somit gilt

$$f(T) = [\det(xI - A)^t](T) = \det[(xI - A)(T)] = \det B.$$

Wir wollen zeigen $f(T) = 0$. Also zeigen wir $(\det B)(\alpha_k) = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Nun gelten per Definition für B_{ij} und α_j :

$$(2) \sum_{j=1}^n B_{ij}(\alpha_j) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n. \text{ Setze } \tilde{B} := \text{adj} B.$$

Aus (2) folgt für alle k und i : $\tilde{B}_{ki}(\sum_{j=1}^n B_{ij} \alpha_j) = 0 = \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j$.

Wir summieren über i und bekommen:

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \right)}_{kj\text{-te Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j).$$

Nun ist $\tilde{B}B = (\det B)I$, also $\sum_{i=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} = \delta_{kj} \det B$.

Also $0 = \sum_{j=1}^n \delta_{kj} (\det B)(\alpha_j) = (\det B)(\alpha_k)$. □

Wichtige Bemerkung Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung (e.g. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).
 $A \in \text{Mat}_{n \times n}(F_0) \subseteq \text{Mat}_{n \times n}(F_1)$.
 Wir bezeichnen mit

$$\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_0}(A)$$

beziehungsweise

$$\text{Char. Pol.}_{F_1}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_1}(A)$$

die charakteristischen bzw. minimalen Polynome von A jeweils als Element aus $\text{Mat}_{n \times n}(F_0)$ und $\text{Mat}_{n \times n}(F_1)$.

Wir wollen zeigen, dass

- (1) $\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) = \text{Char. Pol.}_{F_1}(A)$ und
- (2) $\text{Min. Pol.}_{F_0}(A) = \text{Min. Pol.}_{F_1}(A)$.

Beweis

- (1) Ist einfach, weil $\det(B)$ nur von Koeffizienten der Matrix B abhängen.
- (2) (i) Wir untersuchen zunächst die folgende Frage: Wie entscheiden wir, für den gegebenen Körper K und der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit $\deg(p) = k$ und $p(A) = 0$?
 Wir lösen ein Matrixgleichungssystem

$$A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \dots + x_0I = 0 \quad (*)$$

$(*)$ ist also ein lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen x_0, \dots, x_{k-1} . Jede Lösung $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$ gibt uns ein Polynom $p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$ mit $p(x) \in \mathcal{A}(A)$. Wenn wir $(*)$ (für die kleinste natürliche Zahl k , für die es eine Lösung gibt) gelöst haben, dann ist die Lösung a_0, \dots, a_{k-1} eindeutig, weil sie uns die eindeutig definierten Koeffizienten $1, a_{k-1}, \dots, a_0$ von Min. Pol. (A) liefert.

Wir folgern:

Sei k minimal, so dass $(*)$ eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das Min. Pol. $_k(A)$.

- (ii) Nun untersuchen wir Lösungen für LGS:

Sei $B \in \text{Mat}_{m \times n}(F_0)$, $F_0 \subseteq F_1$ Körpererweiterung, $Y \in F_0^{m \times 1}$. Betrachte

$$BX = Y \quad (S)$$

Hat (S) eine Lösung in $F_1^{n \times 1}$, dann hat (S) auch eine Lösung in $F_0^{n \times 1}$ (und umgekehrt natürlich!).

Dies gilt, weil die r.Z.S.F. $(B | Y)$ (bzgl. F_1) uns alles liefert bzgl. Existenz von Lösungen. Nun ist aber die r.Z.S.F. eindeutig! Also ist sie gleich bezüglich F_0 .

Beweis, Forts. Aus (i) und (ii) sehen wir, dass $(*)$ eine Lösung $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in F_1^k$ genau dann hat, wenn es eine Lösung in F_0^k hat. Die Eindeutigkeit des Min. Pol. F_1 liefert außerdem, dass die Lösung in F_0^k auch (a_0, \dots, a_{k-1}) sein muss! \square

§ 11 Trigonalisierbarkeit, invariante Unterräume

Definition 1 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist trigonalisierbar, falls es eine Basis \mathcal{B} für V gibt, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix (i.e. $a_{ij}=0$ für $i > j$) ist.

Satz 2 V endlich dim., $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Es gilt: T ist trigonalisierbar \Leftrightarrow Char. Pol. (T) zerfällt in Linearfaktoren über K (i.e. Char. Pol. $(T) = (x - c_1)^{n_1} \dots (x - c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$).

Beweis “ \Rightarrow ” Klar, weil $[T]_{\mathcal{B}} = A$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $\det(xI - A)$ ist das Produkt $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$.

“ \Leftarrow ” Wir werden per Induktion eine Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ aufbauen, in der $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da T wenigstens einen Eigenwert hat, hat T auch einen Eigenvektor zum Eigenwert $c_1 \in K$. Sei $\alpha \neq 0$ solch ein Eigenvektor und ergänze zu einer Basis $\{\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ für V (geordnet, so dass α der erste Vektor davon ist).

Betrachte diesbezüglich die Matrixdarstellung von T :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}} \right\} \Gamma \in Mat_{(n-1) \times (n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W, W)$, wobei $W := span\{\beta_2, \dots, \beta_n\}$ definiert durch $Gw := \Gamma w$. Wir sehen also Char. Pol. $(T) = (x - c_1) \text{ Char. Pol. } (G)$. Da Char. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist, so ist es auch Char. Pol. (G) . Die IA liefert eine Basis $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, in der G eine obere Dreiecksmatrix-Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown \\ & & & & \diagdown \end{array} \right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und setze $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ \square