11. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy
SS 2016: 19. Mai 2016

§ 9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1

(*a*) Seien V ein K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann ist $c \in K$ ein *Eigenwert von* T, falls ein $\alpha \in V$ existiert mit $\alpha \neq 0$ und

$$T(\alpha) = c\alpha.$$

(*b*) Sei $\alpha \in V$ und $T(\alpha) = c\alpha$, dann heißt α *Eigenvektor* (zum Eigenwert c).

(*c*) $W_c := \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = c\alpha\}$ ist ein Unterraum, der *Eigenraum* (zum Eigenwert c).

Bemerkung $W_c = \ker(T - cI)$, d.h. $W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (T - cI)\alpha = 0\}$.
c ist also Eigenwert genau dann, wenn $(T - cI)$ singulär ist.

Satz 1 Sei V endlich dim., $T \in \mathcal{L}(V,V), c \in K$. Äquivalent sind:

(*i*) c ist Eigenwert von T.

(*ii*) $(T - cI)$ ist nicht invertierbar.

(*iii*) $\det(T - cI) = 0$.

Bemerkung 2 $\det(T - xI)$ ist ein Polynom von Grad n (die Eigenwerte sind also genau dessen Nullstellen).

Beweis Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$, $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Es ist $A - xI = [T - xI]_{\mathcal{B}}$. Nun ist

$$B := xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & \\ & & x - a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } b_{ii} = (x - a_{ii})$$

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \underbrace{(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}}_{\text{Falls } \neq 0.}$$

$$\deg\ (b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}) = |\{i \in \{1,\dots,n\} : \tau(i) = i\}|.$$

Also ist $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$ der einzige Term (Hauptterm von Grad n). Wir sehen also, dass $\deg\left(\sum_{\tau}(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}\right) = n$ und außerdem, dass $\det(xI - A)$ ein normiertes Polynom ist. □

Definition 2 $c \in K$ ist ein Eigenwert von $A \in Mat_{n\times n}(K)$, falls $(cI - A)$ singulär ist. Also sind die Eigenwerte von A die Nullstellen von $\det(xI - A)$ wie oben.

Definition 3 $f(x) := \det(xI - A)$ ist das charakteristische Polynom von A.

Lemma 1 Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

Beweis Für $B = P^{-1}AP$ gilt
$\det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) = \det P^{-1}\det(xI - A)\det P = \det(xI - A)$. □

Definition 4 Sei V endlich dim; $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

$$\text{Char. Pol. } (T) := \text{ Char. Pol. } ([T]_{\mathcal{B}})$$

für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von V (und damit für jede Basis).

Bermerkung und Beispiele T kann also nicht mehr als $\dim(V)$ Eigenwerte in K haben.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$
hat keine reelle Eigenwerte, weil $\det(xI - A) = x^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$\text{Char. Pol. } (A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Eigenwerte $c = 1,\ c = 2 \in \mathbb{R}$.

$c = 1 \quad \ker(A - I) := W_1$

$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ hat Rang $= 2$, also $\dim(\ker(A - I)) = 1$.

Wir wollen eine Basis für W_1 finden. Löse

$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = (1, 0, 2)$ ist eine Lösung und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1.

$c = 2 \quad \ker(A - 2I) := W_2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ hat Rang $= 2$, also $\dim W_2 = 1$.

Finde Lösung wie oben.
$\alpha_2 = (1, 1, 2)$ und $\{\alpha_2\}$ ist eine Basis für W_2.

Lemma 2 Seien $v_i \neq 0; v_i \in V$. v_i ist Eigenvektor zu Eigenwert c_i für $i = 1, \dots, k$. Falls $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$ mit $i, j \in \{1, \dots, k\}$, dann ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig.

Beweis Bemerke, dass $v \in V, v \neq 0 \Rightarrow v$ kann nicht Eigenvektor zu verschiedenen Eigenwerten sein.
Wir führen einen Beweis per Induktion: $k = 2$.
Ist $v_2 = cv_1$, so ist $v_2 \in W_{c_1}$, also ist v_2 ein Eigenvektor zur c_1 und $c_2 \neq c_1$. Widerspruch.
Indutkionsannahme gelte für $k - 1$.
Seien $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig. OE haben wir also $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$

$$T(v_k) = c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i \text{ und } T(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$

$$\Rightarrow c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i) v_i = 0$$

$$\underset{IA}{\Rightarrow} c_k - c_i = 0 \Rightarrow c_k = c_i \text{ (mit } i = 1, \dots, k-1).$$

Widerspruch. □

Korollar Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$. Nimm an, dass T n-verschiedene Eigenwerte $d_1, \dots, d_n$ in K hat. Dann hat V eine Basis $\mathcal{D}$, bestehend aus Eigenvektoren von T.

Definition 5 Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$. T ist diagonalisierbar (über K), falls V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

Bemerkung Seien $d_1, \dots, d_n$ verschiedene Eigenwerte von T und $\mathcal{D}$ eine Basis wie im Korollar. Dann ist $[T]_{\mathcal{D}}$ diagonal.