

Universität Konstanz

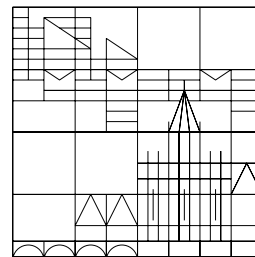
Fachbereich

Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



# Lineare Algebra II

## Übungsblatt 0

---

Keine Abgabe. Ausarbeitung in den Übungsgruppen.

---

### Aufgabe 0.1 Endliche Integritätsbereiche

Es sei  $R$  ein Integritätsbereich.

- (a) Zeigen Sie, für alle  $r \in R \setminus \{0\}$ , dass die Abbildung  $\varphi_r : R \rightarrow R$  definiert durch

$$\varphi_r(a) := ar$$

injektiv ist.

- (b) Sei  $R$  jetzt endlich. Erklären Sie, warum  $\varphi_r$  surjektiv sein muss.  
(c) Folgern Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

### Aufgabe 0.2 Endliche Körper

Sei  $K$  ein endliche Körper. Für alle  $r \in K$ , sei  $\varphi_r : K \rightarrow K$  die Abbildung definiert durch  $\varphi_r(k) := kr$ .

- (a) Zeigen Sie, dass für alle  $r \in K \setminus \{0\}$ ,

$$\prod_{k \in K \setminus \{0\}} \varphi_r(k) = \prod_{k \in K \setminus \{0\}} k$$

gilt.

- (b) Folgern Sie, dass für alle  $k \in K$ ,

$$k^n = k,$$

wobei  $n := |K|$ .

### Aufgabe 0.3 Dualraum

Sei  $K$  ein Körper.

- (a) Sei  $\mathcal{B} := ((1, 0, 1), (-1, -1, -1), (3, 3, 0))$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}$  eine Basis des  $\mathbb{C}^3$  ist. Berechnen Sie, die Dualbasis zu  $\mathcal{B}$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{C}^* := (f_1, f_2, f_3)$ , definiert durch

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, x_3) &:= x_1 + 2x_2 \\f_2(x_1, x_2, x_3) &:= x_1 + x_2 + x_3 \\f_3(x_1, x_2, x_3) &:= 2x_1 + x_2,\end{aligned}$$

eine Basis des  $(\mathbb{C}^3)^*$  ist.

- (c) Finden Sie eine Basis  $\mathcal{C}$  des  $\mathbb{C}^3$ , so dass  $\mathcal{C}^*$  (definiert wie in Teil (ii)) eine Dualbasis zu  $\mathcal{C}$  ist.

### Aufgabe 0.4

Sei  $K$  ein Körper.

- (a) Seien  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $T : V \rightarrow V$  ein lineare Operator. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
- (i)  $T$  ist injektiv.
  - (ii)  $T$  ist surjektiv.
  - (iii)  $T$  ist bijektiv.
- (b) Geben Sie eine lineare Abbildung  $T : K^{\mathbb{N}_0} \rightarrow K^{\mathbb{N}_0}$  an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.
- (c) Geben Sie eine lineare Abbildung  $T : K^{\mathbb{N}_0} \rightarrow K^{\mathbb{N}_0}$  an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.