Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 0

Keine Abgabe. Ausarbeitung in den Übungsgruppen.

Aufgabe 0.1 Endliche Integritätsbereiche
Es sei R ein Integritätsbereich.

(a) Zeigen Sie, für alle $r \in R \backslash \{0\}$, dass die Abbildung $\varphi_r : R \to R$ definiert durch

$$\varphi_r(a) := ar$$

injektiv ist.

(b) Sei R jetzt endlich. Erklären Sie, warum φ_r surjektiv sein muss.

(c) Folgern Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

Aufgabe 0.2 Endliche Körper
Sei K ein endliche Körper. Für alle $r \in K$, sei $\varphi_r : K \to K$ die Abbildung definiert durch $\varphi_r(k) := kr$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $r \in K \backslash \{0\}$,

$$\prod_{k \in K \backslash \{0\}} \varphi_r(k) = \prod_{k \in K \backslash \{0\}} k$$

gilt.

(b) Folgern Sie, dass für alle $k \in K$,

$$k^n = k,$$

wobei $n := |K|$.

Aufgabe 0.3 Dualraum
Sei K ein Körper.

(a) Sei $\mathcal{B} := ((1,0,1),(-1,-1,-1),(3,3,0))$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$ ist. Berechnen Sie, die Dualbasis zu $\mathcal{B}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^* := (f_1, f_2, f_3)$, definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3) &:= x_1 + 2x_2 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &:= x_1 + x_2 + x_3 \\ f_3(x_1,x_2,x_3) &:= 2x_1 + x_2, \end{aligned}$$

eine Basis des $(\mathbb{C}^3)^*$ ist.

(c) Finden Sie eine Basis $\mathcal{C}$ des $\mathbb{C}^3$, so dass $\mathcal{C}^*$ (definiert wie in Teil (ii)) eine Dualbasis zu $\mathcal{C}$ ist.

Aufgabe 0.4
Sei K ein Körper.

(a) Seien V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ ein lineare Operator. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) T ist injektiv.

(ii) T ist surjektiv.

(iii) T ist bijektiv.

(b) Geben Sie eine lineare Abbildung $T : K^{\mathbb{N}_0} \to K^{\mathbb{N}_0}$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine lineare Abbildung $T : K^{\mathbb{N}_0} \to K^{\mathbb{N}_0}$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.