**Universität Konstanz**

**Fachbereich**
**Mathematik und Statistik**

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

# Lineare Algebra II
## Übungsblatt 8

### Aufgabe 8.1
Sei $K$ ein Körper.

(a) Sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum und sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung, sowie $h := \dim(\mathrm{Im}(T))$. Zeigen Sie, dass der Grad des Minimalpolynoms von $T$ höchstens $h + 1$ ist.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen Sie, dass $M \in K^{n\times n}$ mit rang$(M) = n - 1$ und dem Grad des Minimalpolynoms $n$ existiert.

### Aufgabe 8.2
Sei $K$ ein Körper. Seien $V$ ein $K$-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von $V$ mit $U_1 + U_2 = V$. Weiter sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $m_1$ (bzw. $m_2$) das Minimalpolynom von $T|_{U_1} : U_1 \to U_1$ (bzw. $T|_{U_2} : U_2 \to U_2$). Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von $T$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $m_1$ und $m_2$ ist.
**Hinweis**: Seien $p_1, p_2 \in K[x]$. Ein normiertes Polynom $q$ heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches von $p_1$ und $p_2$, falls

(i) $p_1|q$ und $p_2|q$

(ii) für jedes $q' \in K[t]$ mit $p_1|q'$ und $p_2|q'$ folgt $q|q'$.

**Aufgabe 8.3**
Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Satz von Cayley-Hamilton für obere Dreiecksmatrizen direkt zu beweisen. Der Satz von Cayley-Hamilton soll nicht verwendet werden.
Sei $K$ ein Körper. Für $0 \leq k \leq n$ sei $V_k$ der Unterraum

$$V_k := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i = 0 \text{ for } i > k \right\}$$

von $K^{n \times 1}$.
Für $0 < k \leq n$ sei $U_k \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix deren $(k, k)$-ter Eintrag gleich null ist.

(a) Seien $0 < k \leq n$ und $v \in V_k$. Zeigen Sie, dass $U_k v \in V_{k-1}$.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt

$$U_1 U_2 ... U_{n-1} U_n = 0$$

ist.

(c) Sei $A$ eine obere Dreiecksmatrix und $\chi_A$ das charakteristische Polynom von $A$. Zeigen Sie, dass

$$\chi_A(A) = 0$$

gilt.

**Aufgabe 8.4**
Wir bezeichnen als Spur $\mathrm{Tr}(A)$ einer $n \times n$-Matrix $A$ über einem Körper die Summe der Diagonalelemente dieser Matrix.
Seien $K$ ein Körper und $c_1, ..., c_k \in K$. Sei $A \in K^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom

$$(x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}.$$

Zeigen Sie, dass

$$d_1 c_1 + ... + d_k c_k = \mathrm{Tr}(A)$$

und

$$c_1^{d_1} \dots c_k^{d_k} = \det A.$$

**Hinweis:** Für die Aussage über die Spur, vergleichen Sie die Koeffizienten von $x^{n-1}$ in $\det(xI - A)$ und $(x - c_1)^{d_1} \ldots (x - c_k)^{d_k}$.

**Aufgabe 8.5 Zusatzaufgabe für Interessierte**
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass $A$ und $B$ ähnlich über $\mathbb{R}$ sind, falls $A$ und $B$ ähnlich über $\mathbb{C}$ sind.

---

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 25.06.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---