Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 7

Am Montag, 11.Juni zur normalen Vorlesungszeit wird die Probeklausur stattfinden.
Nutzt die nächste Woche um den bisherigen Stoff zu wiederholen.
Dieses Übungsblatt muss erst am 18.06.2012 abgegeben werden.

Aufgabe 7.1
Sei K ein Körper. Seien $A, B \in K^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(I - BA)$ invertierbar ist, falls $(I - AB)$ invertierbar ist.

Hinweis: Falls $(I - AB)$ invertierbar ist,

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

(b) Zeigen Sie, dass AB und BA die gleichen Eigenwerte haben.

(c) Haben AB und BA immer die gleichen Eigenvektoren?

Aufgabe 7.2
Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass für alle $f \in K[x]$ und alle Basen $\mathcal{B}$ von V

$$[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$$

gilt.

Aufgabe 7.3
Seien K ein Körper und $c \in K$. Seien V ein K-Vektorraum, $\alpha \in V$ und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass für alle $g \in K[x]$, falls

$$T(\alpha) = c\alpha,$$

$$g(T)(\alpha) = g(c)\alpha$$

gilt.

Aufgabe 7.4

(a) Berechnen Sie, das Minimalpolynom von der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ mit charakteristischem Polynom

$$(x-1)(x-2)(x-3)^2(x-4)^2.$$

Geben Sie alle möglichen Minimalpolynomen von A an. (Begründen Sie ihre Antwort mit Cayley-Hamilton.)

Aufgabe 7.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

(a) Sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
Sei $T : V \to V$ die lineare Abbildung definiert durch

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass T keine Eigenwerte hat.

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Differential- und Intergralrechnung.

(b) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der C^∞ Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl Eigenwert der linearen Abbildung $d/dt : V \to V$, die $f(t)$ auf ihre Ableitung abbildet, ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 18.06.12** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
