

Universität Konstanz

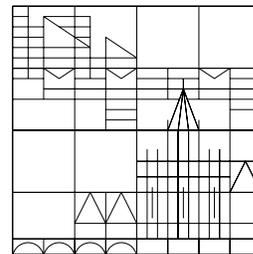
Fachbereich

Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



## Lineare Algebra II

### Übungsblatt 6

#### Aufgabe 6.1

(a) Seien  $A \in K^{r \times r}$ ,  $B \in K^{r \times s}$  fest gewählt. Für  $C \in K^{s \times s}$  sei

$$\delta(C) := \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\delta(C) = \det(C) \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Seien  $A \in K^{r \times r}$ ,  $B \in K^{r \times s}$  und  $C \in K^{s \times s}$ .

(i) Verwenden Sie Zeilenumformungen, um zu zeigen, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det A$$

gilt.

Folgern Sie, dass für alle  $A \in K^{r \times r}$ ,  $B \in K^{r \times s}$  and  $C \in K^{s \times s}$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$$

gilt.

### Aufgabe 6.2

Sei  $A \in K^{m \times n}$ . Sind  $1 \leq r \leq m$  und  $1 \leq s \leq n$ , so ist eine  $r \times s$  *Untermatrix* von  $A$  eine Matrix, die man durch Streichen von  $m - r$  Zeilen und  $n - s$  Spalten aus  $A$  erhält.

Der *Determinantenrang*  $\text{detrang}(A)$  einer Matrix  $A \neq 0$  ist das größte  $1 \leq r \leq \min(n, m)$  so, dass eine  $r \times r$  Untermatrix  $B$  von  $A$  existiert mit  $\det B \neq 0$ .

Sei  $A \in K^{n \times n}$  mit  $A \neq 0$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $\text{detrang}(A) \geq \text{rang}(A)$ .

(b) Zeigen Sie, dass  $\text{detrang}(A) \leq \text{rang}(A)$ .

### Aufgabe 6.3

(a) Seien  $n \geq 2$  und  $A, B \in K^{n \times n}$  mit  $\det A \neq 0$  und  $\det B \neq 0$ . Zeigen Sie, dass:

(i)  $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\text{adj}(A)$

(ii)  $\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}$

(iii)  $\text{adj}(\text{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$

(b) Sei  $n \geq 2$  und  $A \in K^{n \times n}$ . Zeigen Sie, dass

$$\text{rang}(\text{adj}(A)) = \begin{cases} n, & \text{wenn } \text{rang}(A) = n; \\ 1, & \text{wenn } \text{rang}(A) = n - 1; \\ 0, & \text{wenn } \text{rang}(A) \leq n - 2. \end{cases}$$

#### Aufgabe 6.4

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über jedem der Körper  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  berechnen Sie:

- (a) das charakteristische Polynom von  $A$ ,
- (b) die Eigenwerte von  $A$ ,
- (c) die Eigenräume von  $A$ ,
- (d) die Dimension der Eigenräume von  $A$ .

Ist  $A$  diagonalisierbar über  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ?

#### Aufgabe 6.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und sei  $C := A + iB \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Zeigen Sie, dass  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $A + \lambda B$  invertierbar existiert, falls  $C$  invertierbar ist.

---

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe **Montag, 04.06.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---

<http://www.math.uni-konstanz.de/~gregory/linearealgebra2.html>