**Universität Konstanz**

**Fachbereich**
**Mathematik und Statistik**

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

# Lineare Algebra II
## Übungsblatt 4

### Aufgabe 4.1

(a) Sei $\sigma \in \mathsf{S}_n$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$.

(b) Sei $A_n$ die Menge alle $\sigma \in S_n$ mit $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $A_n$ eine Untergruppe von $S_n$ ist. Zeigen Sie, dass die Menge aller $3$-Zyklen die Gruppe $A_n$ erzeugt, falls $n \geq 3$. (Eine Teilmenge $M$ einer Gruppe $G$ erzeugt $G$, falls jedes Element von $G$ das Produkt von Elementen von $M$ und Inversen von Elementen von $M$ ist.)

(c) Zeigen Sie, dass alle Untergruppen von $\mathsf{S}_n$ entweder nur gerade Permutationen oder die gleiche Anzahl von geraden und ungeraden Permutationen enthalten.

### Aufgabe 4.2

Sei $K$ ein Körper. Seien $V$ ein $K$-Vektorraum mit Basis $\{x_1, ..., x_n\}$ und $U$ ein $K$-Vektorraum mit Basis $\{y_1, ..., y_m\}$.

(a) Seien $\alpha_{ij} \in K$ für $0 < i \leq n$ und $0 < j \leq m$. Zeigen Sie, dass es eine Bilinearform $w : V \times U \to K$ mit $w(x_i, y_j) = \alpha_{ij}$ für $0 < i \leq n$ und $0 < j \leq m$ gibt. Zeigen Sie, dass $w$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

(b) Für $0 < p \leq n$ und $0 < q \leq m$ sei $w_{pq} : U \times V \to K \in \mathcal{L}^{(2)}(U \times V, K)$ die eindeutige Bilinearform mit $w_{pq}(x_i, y_j) = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Zeigen Sie, dass

$$W := \{w_{pq} \mid 0 < p \leq n \text{ und } 0 < q \leq m\}$$

linear unabhängig über $K$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $W$ (von Teil (b)) ein Erzeugendensystem von $\mathcal{L}^{(2)}(U \times V, K)$ als $K$-Vektorraum ist. Geben Sie die Dimension von $\mathcal{L}^{(2)}(U \times V, K)$ an.

**Aufgabe 4.3**

(a) Sei $K$ ein Körper und seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2 \in K$. Ohne Berechnung, erklären Sie warum

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Sei $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ und alle Einträge seien entweder $1$ oder $-1$. Beweisen Sie, dass $\det A \in \mathbb{Z}$ und teilbar durch $2^{n-1}$ (in $\mathbb{Z}$) ist.

(c) Seien $a, b, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Seien $A := (a, r_2, r_3, r_4)$ and $B := (b, r_2, r_3, r_4)$ mit $\det A = 4$ und $\det B = 1$.

Finden Sie $\det(A + B)$ und $\det(r_4, r_3, r_2, a + b)$.

(d) Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{F}_3$.

**Aufgabe 4.4**

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum. Ein $n$-lineares Funktional $\Delta : V^n \to K$ heißt alternierend falls wenn $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $z_i = z_j$ und $i \neq j$ existieren, $\Delta(z_1, ..., z_n) = 0$ ist.

(a) Sei $\Delta : V^n \to K$ ein $n$-lineares alternierendes Funktional. Zeige, dass wenn $x_1, ..., x_n \in V$ lineare abhängig sind $\Delta(x_1, ..., x_n) = 0$.

(b) Wir sagen, dass $\Delta$ trivial ist, wenn $\Delta(x_1, ..., x_n) = 0$ für alle $x_1, ..., x_n \in V$. Sei $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ eine Basis von $V$. Zeige, dass $\Delta$ genau dann trivial ist, wenn $\Delta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$.

(c) Sei $U$ ein $r$-dimensionaler Unterraum von $V$, seien $x_{r+1}, ..., x_n$ feste Vektoren in $V$ und sei $\Delta : V^n \to K$ ein $n$-lineares alternierendes Funktional. Zeige, dass die Funktion

$$\Delta_U : U^r \to K$$

definiert durch

$$\Delta_U(u_1, ..., u_r) := \Delta(u_1, ..., u_r, x_{r+1}, ..., x_n)$$

ein alternierendes $r$-lineares Funktional ist. Wann ist $\Delta_U$ nicht trivial? Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 4.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

Ihnen wird ein Geduldspiel gegeben, dass aus fünfzehn kleinen quadratischen Plättchen besteht, die von $1$ bis $15$ durchnummeriert sind und auf einem $4 \times 4$ Brett so befestigt sind, dass man jedes Plättchen vertikal und horizontal in das angrenzende Feld verschieben kann, falls der entsprechende Platz nicht bereits von einem anderen Plättchen besetzt ist. Die Plättchen können nicht aus dem Brett herausgenommen werden. Ist es möglich durch eine Folge erlaubter Züge von der ersten unten abgebildeten Konfiguration zur zweiten zu kommen?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

---

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 21.05.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---