**Universität Konstanz**
**Fachbereich**
**Mathematik und Statistik**
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

# Algebra
## Übungsblatt 5

### Aufgabe 5.1

Sei $K$ ein Körper mit char $K = p > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in K$

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

gilt. Folgern Sie, dass für alle $a, b \in K$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma : K \to K,\ a \mapsto a^p$$

ein Homomorphismus ist.

(Man nennt $\sigma$ Frobenius oder Frobeniushomomorphismus.)

### Aufgabe 5.2

Seien $p := X^3 + X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass $p$ irreduzibel ist.

Sei $\theta$ eine Nullstelle von $p$ in einer Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

(b) Schreiben Sie $(\theta^2 - 1)^{-1}$und $\theta^5$ als Linearkombination von $1, \theta, \theta^2$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\theta^2 - 1)$.

### Aufgabe 5.3

(a) Sei $L/K$ eine Körpererweiterung mit $[L : K] = 3$. Sei $x \in L$ und $y \in L \backslash K$. Zeigen Sie, dass $p, q, s, r \in K$ existieren so, dass

$$x = \frac{p + qy}{r + sy}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^2 + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Sei $\theta$ eine Nullstelle von $x^2+1$ in einer Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Schreiben Sie

$$(a + b\theta)(\alpha + \beta\theta)$$

als Linearkombination über $\mathbb{Q}$ von $1, \theta$

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist. Sei $\theta$ eine Nullstelle von $x^3 - 2$ in einer Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Seien $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$. Schreiben Sie
$$(a + b\theta + c\theta^2)(\alpha + \beta\theta + \gamma\theta^2)$$
als Linearkombination über $\mathbb{Q}$ von $1, \theta, \theta^2$.

**Aufgabe 5.4**

(a) Finden Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(c) Seien $F$ ein Körper mit char $(F) \neq 2$ und $c, d \in F$ keine Quadrate in $F$. Zeigen Sie, dass $[F(\sqrt{d}, \sqrt{c}) : F] = 4$ genau dann gilt, wenn $cd$ kein Quadrat in $F$ ist.

---

Abgabe **Montag, 03.12.2012** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---